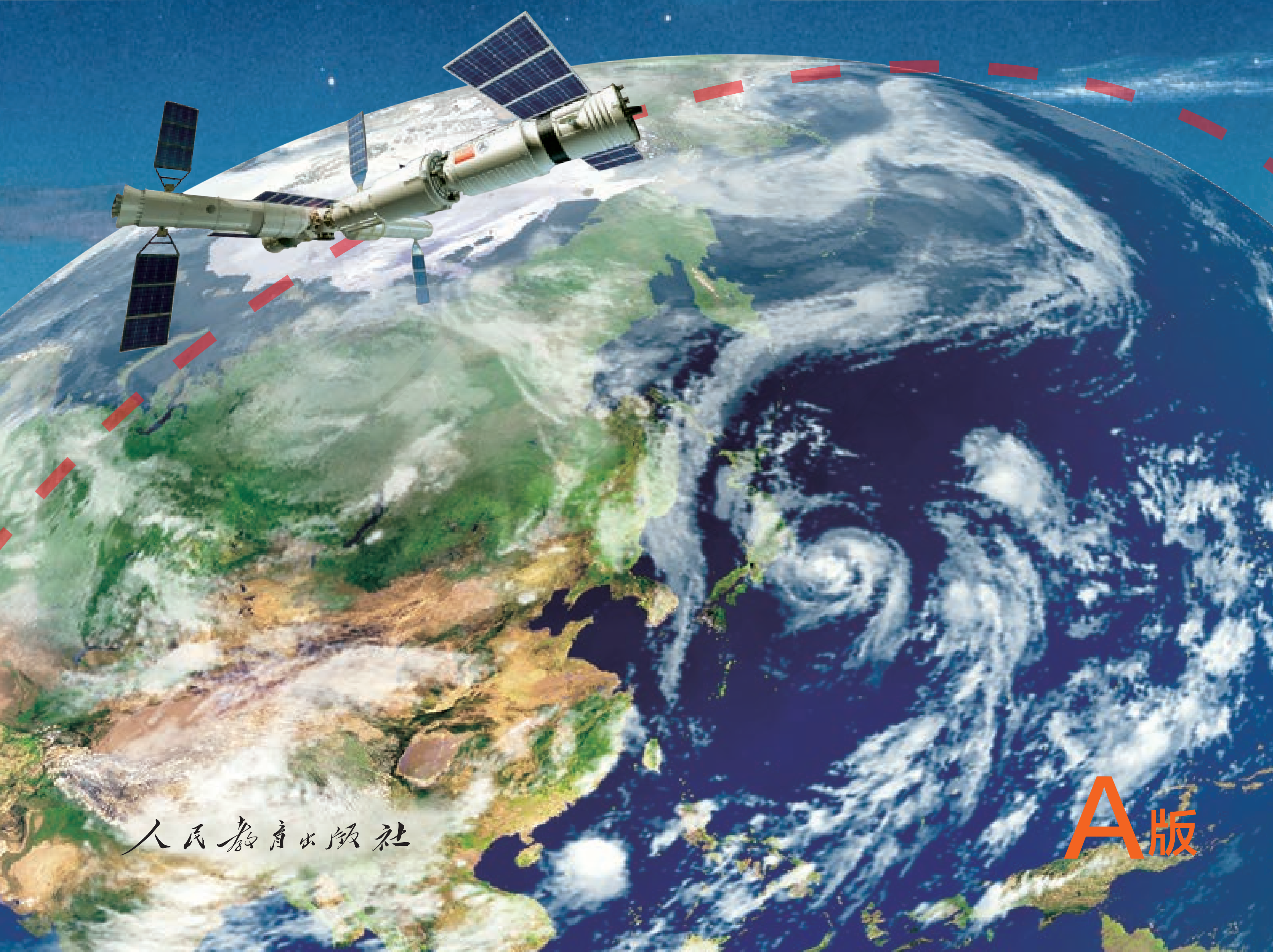
国家教材委员会专家委员会审核通过
2019

普通高中教科书

数学

选择性必修

第一册



人民教育出版社

A版

普通高中教科书

数学

选择性必修

第一册

人民教育出版社　课程教材研究所
中学数学课程教材研究开发中心　编著

A版

人民教育出版社
·北京·

主　　编：章建跃　李增沪
副 主 编：李　勇　李海东　李龙才
本册主编：张劲松　申　铁

编写人员：王红权　申　铁　刘长明　李昌官　李建明
吴明华　俞求是　薛　彬

责任编辑：刘长明
美术编辑：王俊宏

普通高中教科书　数学　选择性必修　第一册
人民教育出版社　课程教材研究所
中学数学课程教材研究开发中心　编著

出　　版　人民教育出版社
（北京市海淀区中关村南大街 17 号院 1 号楼　邮编：100081）
网　　址　http://www.pep.com.cn

本册导引

本书根据《普通高中数学课程标准（2017 年版）》编写，包括“空间向量与立体几何”“直线和圆的方程”“圆锥曲线的方程”三章内容.

在必修（第二册）学习“平面向量及其应用”和“立体几何初步”的基础上，我们学习“**空间向量与立体几何**”. 在本章，我们将类比平面向量，学习空间向量的概念、线性运算和数量积运算、空间向量基本定理及空间向量的坐标运算，从中体会平面向量与空间向量的共性和差异；运用向量方法研究空间基本图形的平行、垂直等位置关系和距离、角度等度量问题，从中体会向量方法与综合几何方法的共性和差异；通过运用向量方法解决简单的数学问题和实际问题，感悟向量是研究几何问题的有效工具.

“直线和圆的方程”“圆锥曲线的方程”属于解析几何的内容. 解析几何是数学发展过程中的一个标志性成果，是微积分创立的基础. 我们将在平面直角坐标系中探索确定直线、圆、椭圆、双曲线、抛物线等几何图形的几何要素，并利用几何要素建立它们的方程；再通过方程，运用代数方法进一步认识直线、圆、圆锥曲线的性质以及它们之间的一些位置关系；通过运用解析几何方法解决简单的数学问题和实际问题，感悟解析几何中蕴含的数学思想和方法.

本册的研究对象是几何图形，所用的研究方法主要是代数方法. 通过学习，同学们将逐步体会用代数方法解决几何问题的“三步曲”：

第一步：用向量或坐标或方程表示几何问题中的几何要素，如点、直线、平面、圆、圆锥曲线等，把几何问题转化为代数问题；

第二步：通过代数运算，解决代数问题；

第三步：把代数运算的结果“翻译”成几何结论.

祝愿同学们通过本册书的学习，不但学到更多的数学知识，而且在数学能力、数学核心素养等方面都有较大的提高，并培养起更高的数学学习兴趣，形成对数学的更加全面的认识.

目 录

第一章
空间向量与立体几何

通过“平面向量及其应用”的学习，我们知道，平面内的点、直线可以通过平面向量及其运算来表示，它们之间的平行、垂直、夹角、距离等关系可以通过平面向量运算而得到，从而有关平面图形的问题可以利用平面向量的方法解决．在“立体几何初步”中，我们用综合几何方法研究了空间几何体的结构特征以及空间点、直线、平面的位置关系．一个自然的想法是，能否把平面向量推广到空间向量，从而利用空间向量表示空间中点、直线、平面等基本元素，通过空间向量运算解决立体几何问题．在本章，我们就来研究这些问题．

在本章学习中，我们要注意利用类比的方法理解空间向量的概念、运算、基本定理及其坐标表示，在此过程中体会平面向量与空间向量的共性和差异；在运用向量的方法研究空间基本图形的位置关系和度量关系的过程中，体会向量方法与综合几何方法的共性和差异；通过用向量方法解决数学问题和实际问题，感悟向量在研究几何问题中的作用．

1.1 空间向量及其运算

章前图展示的是一个做滑翔伞运动的场景．可以想象，在滑翔过程中，飞行员会受到来自不同方向、大小各异的力，例如绳索的拉力、风力、重力等．显然，这些力不在同一个平面内．联想用平面向量解决物理问题的方法，能否把平面向量推广到空间向量，从而利用空间向量研究滑翔运动呢？下面我们类比平面向量研究空间向量，先从空间向量的概念和表示开始．

1.1.1 空间向量及其线性运算

与平面向量一样，在空间，我们把具有大小和方向的量叫做**空间向量**（space vector），空间向量的大小叫做空间向量的**长度**或**模**（modulus）．空间向量用字母 $\boldsymbol{a}$[1]，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$，… 表示．空间中点的位移、物体运动的速度、物体受到的力等都可以用空间向量表示．

❶印刷用黑体 $\boldsymbol{a}$，书写用 $\vec{a}$．

与平面向量一样，空间向量也用有向线段表示，有向线段的长度表示空间向量的模．如图 1.1-1，向量 $\boldsymbol{a}$ 的起点是 A，终点是 B，则向量 $\boldsymbol{a}$ 也可以记作 $\overrightarrow{AB}$，其模记为 $|\boldsymbol{a}|$ 或 $|\overrightarrow{AB}|$．图 1.1-2 所示的正方体中，过同一个顶点 O 的三条棱上的三条有向线段表示的三个向量为 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$，它们是不共面的向量，即它们是不同在任何一个平面内的三个向量．

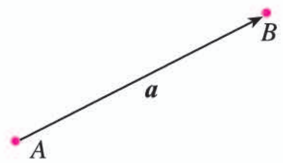


图 1.1-1

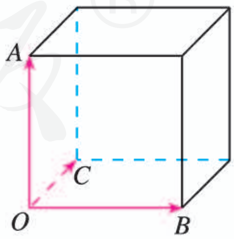


图 1.1-2

与平面向量一样，我们规定，长度为 0 的向量叫做**零向量**（zero vector），记为 $\mathbf{0}$．当有向线段的起点 A 与终点 B 重合时，$\overrightarrow{AB}=\mathbf{0}$．模为 1 的向量叫做**单位向量**（unit vector）．与向量 $\boldsymbol{a}$ 长度相等而方向相反的向量，叫做 $\boldsymbol{a}$ 的**相反向量**，记为 $-\boldsymbol{a}$．

如果表示若干空间向量的有向线段所在的直线互相平行或重合，那么这些向量叫做**共线向量**（collinear vectors）或**平行向量**（parallel vectors）．我们规定：零向量与任意向量平行，即对于任意向量 $\boldsymbol{a}$，都有 $\mathbf{0}/\!/\boldsymbol{a}$．

空间向量是平面向量的推广，其表示方法以及一些相关概念与平面向量一致．

方向相同且模相等的向量叫做**相等向量**（equal vectors）．因此，在空间，同向且等长的有向线段表示同一向量或相等向量．空间向量是自由的，所以对于空间中的任意两个非零向量，我们都可以通过平移使它们的起点重合．因为两条相交直线确定一个平面，所以起点重合的两个不共线向量可以确定一个平面，也就是说，任意两个空间向量都可以平移到同一个平面内，成为同一平面内的两个向量．如图 1.1-3，已知空间向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，以任意点 O 为起点，作向量 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，我们就可以把它们平移到同一个平面 α 内．

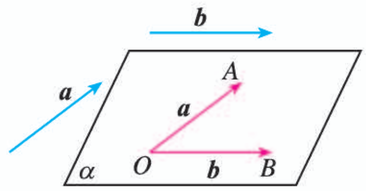


图 1.1-3

数学中，引进一种量后，一个很自然的问题就是要研究它们的运算．由于任意两个空间向量都可以通过平移转化为同一平面内的向量，这样任意两个空间向量的运算就可以转化为平面向量的运算．由此，我们把平面向量的线性运算推广到空间，定义空间向量的加法、减法（图 1.1-4）以及数乘运算（图 1.1-5）：

（1）$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}$；

（2）$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{CA}$；

（3）当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}=\lambda\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{PQ}$；

当 $\lambda<0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}=\lambda\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{MN}$；

当 $\lambda=0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

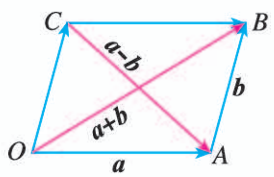


图 1.1-4

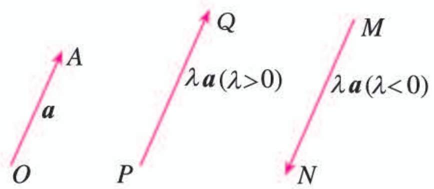


图 1.1-5

想一想，向量线性运算的结果，与向量起点的选择有关系吗？

与平面向量一样，空间向量的线性运算满足以下运算律（其中 λ，$\mu\in\mathbf{R}$）：

交换律：$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$；

结合律：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$，$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$；

分配律：$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$，$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

你能证明这些运算律吗？证明结合律时，与证明平面向量的结合律有什么不同？

探究

如图 1.1-6，在平行六面体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$ 中，分别标出 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}$，$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AD}$ 表示的向量．从中你能体会向量加法运算的交换律和结合律吗？一般地，三个不共面的向量的和与这三个向量有什么关系？

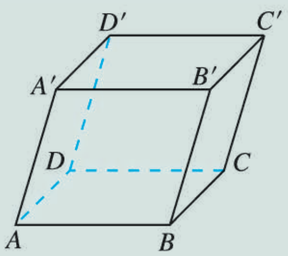


图 1.1-6

可以发现，$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC'}$. 一般地，对于三个不共面的向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$，以任意点 O 为起点，$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 为邻边作平行六面体，则 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 的和等于以 O 为起点的平行六面体对角线所表示的向量. 另外，利用向量加法的交换律和结合律，还可以得到：有限个向量求和，交换相加向量的顺序，其和不变.

探究

对任意两个空间向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，如果 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$（$\lambda\in\mathbf{R}$），$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 有什么位置关系？反过来，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 有什么位置关系时，$\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$？

类似于平面向量共线的充要条件，对任意两个空间向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$（$\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$），$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 的充要条件是存在实数 λ，使

$$\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}.$$

如图 1.1-7，O 是直线 l 上一点，在直线 l 上取非零向量 $\boldsymbol{a}$，则对于直线 l 上任意一点 P，由数乘向量的定义及向量共线的充要条件可知，存在实数 λ，使得

$$\overrightarrow{OP}=\lambda\boldsymbol{a}.$$

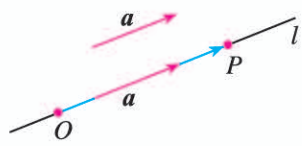


图 1.1-7

我们把与向量 $\boldsymbol{a}$ 平行的非零向量称为直线 l 的**方向向量**（direction vector）. 这样，直线 l 上任意一点都可以由直线 l 上的一点和它的方向向量表示，也就是说，直线可以由其上一点和它的方向向量确定.

如图 1.1-8，如果表示向量 $\boldsymbol{a}$ 的有向线段 $\overrightarrow{OA}$ 所在的直线 OA 与直线 l 平行或重合，那么称向量 $\boldsymbol{a}$ 平行于直线 l. 如果直线 OA 平行于平面 α 或在平面 α 内，那么称向量 $\boldsymbol{a}$ 平行于平面 α. 平行于同一个平面的向量，叫做**共面向量**（coplanar vectors）.

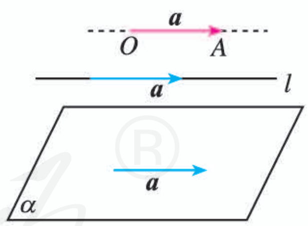


图 1.1-8

我们知道，任意两个空间向量总是共面的，但三个空间向量既可能是共面的，也可能是不共面的. 那么，什么情况下三个空间向量共面呢？

探究

对平面内任意两个不共线向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，由平面向量基本定理可知，这个平面内的任意一个向量 $\boldsymbol{p}$ 可以写成 $\boldsymbol{p}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}$，其中（$x$，$y$）是唯一确定的有序实数对. 对两个不共线的空间向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，如果 $\boldsymbol{p}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}$，那么向量 $\boldsymbol{p}$ 与向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 有什么位置关系？反过来，向量 $\boldsymbol{p}$ 与向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 有什么位置关系时，$\boldsymbol{p}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}$？

可以发现，如果两个向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 不共线，那么向量 $\boldsymbol{p}$ 与向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 共面的充要条件是存在唯一的有序实数对（x，y），使

$$\boldsymbol{p}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}.$$

例 1 如图 1.1-9，已知平行四边形 $ABCD$，过平面 AC 外一点 O 作射线 OA，OB，OC，OD，在四条射线上分别取点 E，F，G，H，使 $\dfrac{OE}{OA}=\dfrac{OF}{OB}=\dfrac{OG}{OC}=\dfrac{OH}{OD}=k$．求证：$E$，$F$，$G$，$H$ 四点共面.

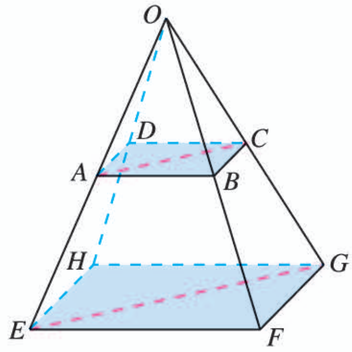


图 1.1-9

分析： 欲证 E，F，G，H 四点共面，只需证明 $\overrightarrow{EH}$，$\overrightarrow{EF}$，$\overrightarrow{EG}$ 共面．而由已知 $\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ 共面，可以利用向量运算由 $\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ 共面的表达式推得 $\overrightarrow{EH}$，$\overrightarrow{EF}$，$\overrightarrow{EG}$ 共面的表达式.

证明： 因为 $\dfrac{OE}{OA}=\dfrac{OF}{OB}=\dfrac{OG}{OC}=\dfrac{OH}{OD}=k$，所以

$$\overrightarrow{OE}=k\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OF}=k\overrightarrow{OB},\ \overrightarrow{OG}=k\overrightarrow{OC},\ \overrightarrow{OH}=k\overrightarrow{OD}.$$

因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形，所以

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}.$$

因此

$$\begin{aligned}\overrightarrow{EG}&=\overrightarrow{OG}-\overrightarrow{OE}=k\overrightarrow{OC}-k\overrightarrow{OA}=k\overrightarrow{AC}\\&=k(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})=k(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA})\\&=\overrightarrow{OF}-\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{EH}.\end{aligned}$$

由向量共面的充要条件可知，$\overrightarrow{EH}$，$\overrightarrow{EF}$，$\overrightarrow{EG}$ 共面，又 $\overrightarrow{EH}$，$\overrightarrow{EF}$，$\overrightarrow{EG}$ 过同一点 E，从而 E，F，G，H 四点共面.

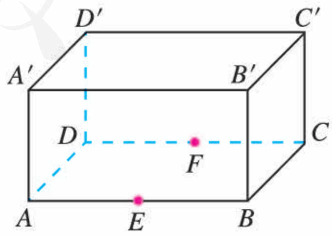
> 选择恰当的向量表示问题中的几何元素，通过向量运算得出几何元素的关系，是解决立体几何问题的常用方法.

练习

1. 举出一些表示三个不同在一个平面内的向量的实例.
2. 如图，E，F 分别是长方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$ 的棱 AB，CD 的中点．化简下列表达式，并在图中标出化简结果：

   (1) $\overrightarrow{AA'}-\overrightarrow{CB}$；　　(2) $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B'C'}$；

   (3) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{B'D'}$；　　(4) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CF}$.



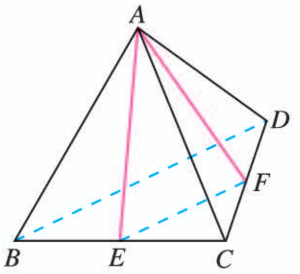
（第 2 题）

3. 在图 1.1-6 中，用 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AA'}$ 表示 $\overrightarrow{A'C}$，$\overrightarrow{BD'}$ 及 $\overrightarrow{DB'}$.
4. 如图，已知四面体 $ABCD$，E，F 分别是 BC，CD 的中点．化简下列表达式，并在图中标出化简结果：

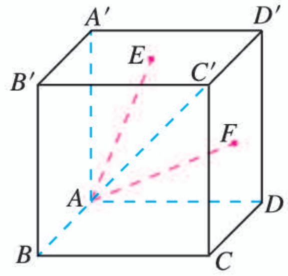
   (1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}$；　　(2) $\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BC})$；　　(3) $\overrightarrow{AF}-\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$.

5. 如图，已知正方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$，E，F 分别是上底面 $A'C'$ 和侧面 CD' 的中心．求下列各式中 x，y 的值：

(1) $\overrightarrow{AC'}=x(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC'})$；(2) $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AA'}+x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AD}$；(3) $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AD}+x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AA'}$．



（第 4 题）



（第 5 题）

1.1.2 空间向量的数量积运算

由于任意两个空间向量都可以通过平移转化为同一平面内的向量，因此，两个空间向量的夹角和数量积就可以像平面向量那样来定义．

如图 1.1-10，已知两个非零向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，在空间任取一点 O，作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，则 $\angle AOB$ 叫做向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的夹角，记作 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$．

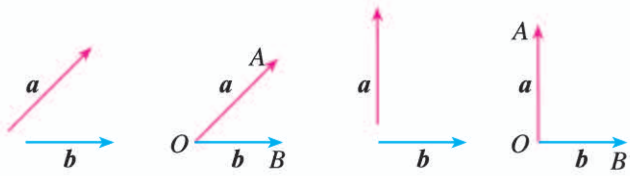


图 1.1-10

通常规定，$0\leqslant\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle\leqslant\pi$．这样，两个向量的夹角是唯一确定的，且 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\langle\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\rangle$．

如果 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{\pi}{2}$，那么向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 互相垂直，记作 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$．

已知两个非零向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，则 $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$ 叫做 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的**数量积**（inner product），记作 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$．即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle.$$

特别地，零向量与任意向量的数量积为 0．

由向量的数量积定义，可以得到：

$$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0;$$

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{a}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}\rangle=|\boldsymbol{a}|^2.$$

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}$ 也记作 $\boldsymbol{a}^2$．

思考

在平面向量的学习中，我们学习了向量的投影．类似地，在空间，向量 $\boldsymbol{a}$ 向向量 $\boldsymbol{b}$ 的投影有什么意义？向量 $\boldsymbol{a}$ 向直线 l 的投影呢？向量 $\boldsymbol{a}$ 向平面 β 的投影呢？

如图 1.1-11(1)，在空间，向量 $\boldsymbol{a}$ 向向量 $\boldsymbol{b}$ 投影，由于它们是自由向量，因此可以先将它们平移到同一个平面 α 内，进而利用平面上向量的投影，得到与向量 $\boldsymbol{b}$ 共线的向量 $\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{c}=|\boldsymbol{a}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle\dfrac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$，向量 $\boldsymbol{c}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量. 类似地，可以将向量 $\boldsymbol{a}$ 向直线 l 投影（图 1.1-11(2)）.

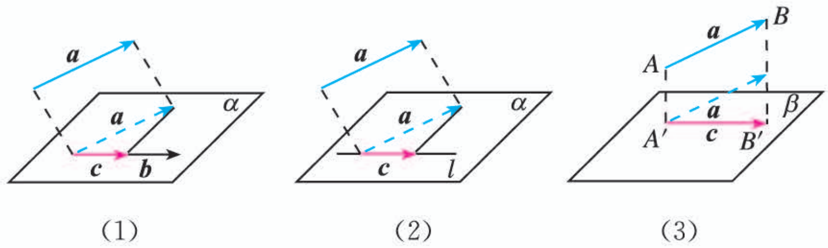


图 1.1-11

如图 1.1-11（3），向量 $\boldsymbol{a}$ 向平面 β 投影，就是分别由向量 $\boldsymbol{a}$ 的起点 A 和终点 B 作平面 β 的垂线，垂足分别为 A'，B'，得到向量 $\overrightarrow{A'B'}$，向量 $\overrightarrow{A'B'}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 在平面 β 上的投影向量. 这时，向量 $\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{A'B'}$ 的夹角就是向量 $\boldsymbol{a}$ 所在直线与平面 β 所成的角.

空间向量的数量积满足如下的运算律：

$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$，$\lambda\in\mathbf{R}$；

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$（交换律）；

$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$（分配律）.

思考

1. 对于三个均不为 0 的数 a，b，c，若 $ab=ac$，则 $b=c$. 对于向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$，由 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$，你能得到 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$ 吗？如果不能，请举出反例.

2. 对于三个均不为 0 的数 a，b，c，若 $ab=c$，则 $a=\dfrac{c}{b}$（或 $b=\dfrac{c}{a}$）. 对于向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=k$，能不能写成 $\boldsymbol{a}=\dfrac{k}{\boldsymbol{b}}$（或 $\boldsymbol{b}=\dfrac{k}{\boldsymbol{a}}$）的形式？

3. 对于三个均不为 0 的数 a，b，c，有 $(ab)c=a(bc)$. 对于向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$，$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$ 成立吗？为什么？

例 2 如图 1.1-12，在平行六面体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$ 中，$AB=5$，$AD=3$，$AA'=7$，$\angle BAD=60°$，$\angle BAA'=\angle DAA'=45°$. 求：

(1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$；(2) AC' 的长（精确到 0.1）.

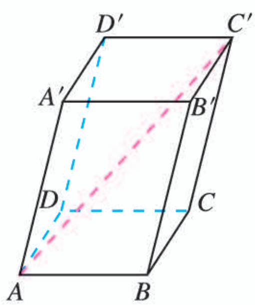


图 1.1-12

解：(1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AD}|\cos\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\rangle$

$=5\times3\times\cos 60°=7.5$；

(2) $|\overrightarrow{AC'}|^2=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'})^2$

$$=|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{AD}|^2+|\overrightarrow{AA'}|^2+2(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AA'})$$

$$=5^2+3^2+7^2+2(5\times3\times\cos 60^\circ+5\times7\times\cos 45^\circ+3\times7\times\cos 45^\circ)$$

$$=98+56\sqrt{2},$$

所以 $AC'\approx 13.3$.

由于空间向量的线性运算和数量积运算具有鲜明的几何背景，空间图形的许多性质可以由向量的线性运算及数量积运算表示出来，因此，立体几何中的许多问题可以用向量运算的方法加以解决.

例 3 如图 1.1-13，m，n 是平面 α 内的两条相交直线. 如果 $l\perp m$，$l\perp n$，求证：$l\perp\alpha$.

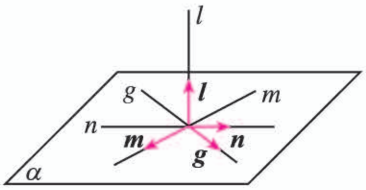


图 1.1-13

分析： 要证明 $l\perp\alpha$，就是要证明 l 垂直于 α 内的任意一条直线 g（直线与平面垂直的定义）. 如果我们能在 g 和 m，n 之间建立某种联系，并由 $l\perp m$，$l\perp n$，得到 $l\perp g$，那么就能解决此问题.

证明： 在平面 α 内作任意一条直线 g，分别在直线 l，m，n，g 上取非零向量 $\boldsymbol{l}$，$\boldsymbol{m}$，$\boldsymbol{n}$，$\boldsymbol{g}$.

因为直线 m 与 n 相交，所以向量 $\boldsymbol{m}$，$\boldsymbol{n}$ 不平行. 由向量共面的充要条件可知，存在唯一的有序实数对 (x, y)，使

$$\boldsymbol{g}=x\boldsymbol{m}+y\boldsymbol{n}.$$

将上式两边分别与向量 $\boldsymbol{l}$ 作数量积运算，得

$$\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{g}=x\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{m}+y\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{n}.$$

因为 $\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{m}=0$，$\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{n}=0$（为什么？），所以 $\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{g}=0$.

所以 $l\perp g$.

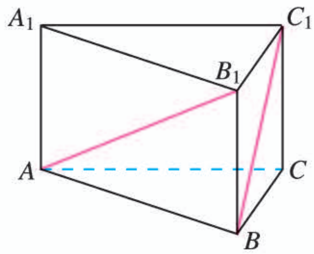
这就证明了直线 l 垂直于平面 α 内的任意一条直线，所以 $l\perp\alpha$.

> ?
> 例 3 即为直线与平面垂直的判定定理的证明过程. 尝试用综合几何方法证明这个定理，并比较两种方法，你能从中体会到向量方法的优越性吗？

练习

1. 如图，在正三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中，若 $AB=\sqrt{2}BB_1$，则 AB_1 与 BC_1 所成角的大小为（　　）.

   (A) 60°　　(B) 90°　　(C) 105°　　(D) 75°



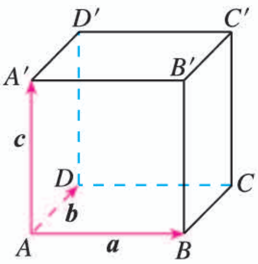
（第 1 题）

2. 如图，正方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$ 的棱长为 1，设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AA'}=\boldsymbol{c}$，求：

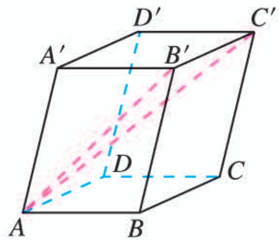
(1) $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$； (2) $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$； (3) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

3. 如图，在平行六面体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$ 中，$AB=4$，$AD=3$，$AA'=5$，$\angle BAD=90°$，$\angle BAA'=\angle DAA'=60°$. 求：

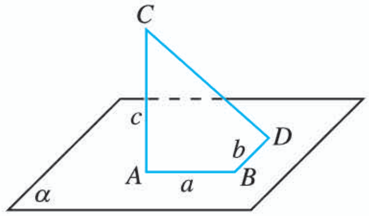
(1) $\overrightarrow{AA'}\cdot\overrightarrow{AB}$； (2) AB' 的长； (3) AC' 的长.



（第 2 题）



（第 3 题）



（第 4 题）

4. 如图，线段 AB，BD 在平面 α 内，$BD\perp AB$，$AC\perp\alpha$，且 $AB=a$，$BD=b$，$AC=c$. 求 C，D 两点间的距离.

习题 1.1

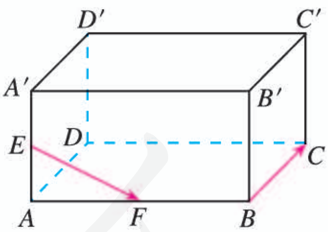
复习巩固

1. 如图，在长方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$ 中，E，F 分别为棱 AA'，AB 的中点.

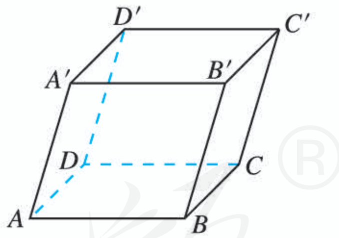
(1) 写出与向量 $\overrightarrow{BC}$ 相等的向量；

(2) 写出与向量 $\overrightarrow{BC}$ 相反的向量；

(3) 写出与向量 $\overrightarrow{EF}$ 平行的向量.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，已知平行六面体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$，化简下列表达式，并在图中标出化简结果：

(1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$； (2) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CC'}$；

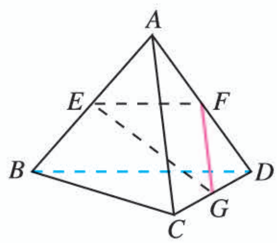
(3) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{CC'}$； (4) $\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'})$.

3. 证明：如果向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 共线，那么向量 $2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 共线.

4. 如图，已知四面体 $ABCD$ 的所有棱长都等于 a，E，F，G 分别是棱 AB，AD，DC 的中点. 求：

(1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$； (2) $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{DB}$； (3) $\overrightarrow{GF}\cdot\overrightarrow{AC}$；

(4) $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{BC}$； (5) $\overrightarrow{FG}\cdot\overrightarrow{BA}$； (6) $\overrightarrow{GE}\cdot\overrightarrow{GF}$.



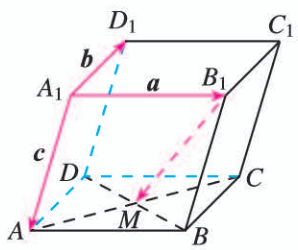
（第 4 题）

综合运用

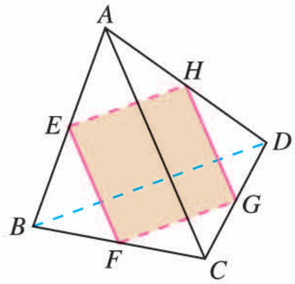
5. 如图，在平行六面体 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 中，AC 与 BD 的交点为 M. 设 $\overrightarrow{A_1B_1}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{A_1D_1}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{A_1A}=\boldsymbol{c}$，则下列向量中与 $\overrightarrow{B_1M}$ 相等的向量是（　　）.

(A) $-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$　　(B) $\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$

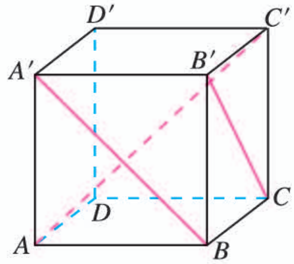
(C) $\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$　　(D) $-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$



（第 5 题）



（第 6 题）



（第 7 题）

6. 如图，已知 E，F，G，H 分别为四面体 $ABCD$ 的棱 AB，BC，CD，DA 的中点，求证：E，F，G，H 四点共面.

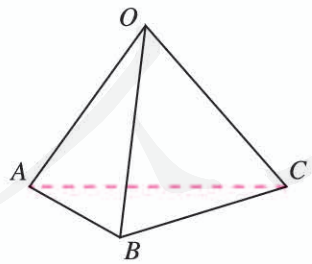
7. 如图，正方体 $ABCD$-$A'B'C'D'$ 的棱长为 a.

(1) 求 $A'B$ 和 $B'C$ 的夹角；(2) 求证：$A'B\perp AC'$.

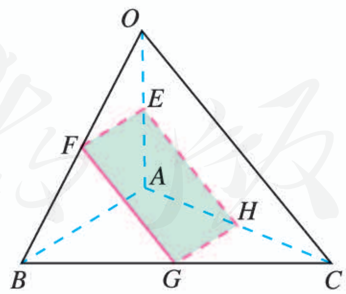
8. 用向量方法证明：在平面内的一条直线，如果与这个平面的一条斜线在这个平面上的射影垂直，那么它也与这条斜线垂直（三垂线定理）.

拓广探索

9. 如图，在四面体 $OABC$ 中，$OA\perp BC$，$OB\perp AC$. 求证：$OC\perp AB$.



（第 9 题）



（第 10 题）

10. 如图，在四面体 $OABC$ 中，$OA=OB$，$CA=CB$，E，F，G，H 分别是 OA，OB，BC，CA 的中点. 求证：四边形 $EFGH$ 是矩形.

1.2 空间向量基本定理

我们知道，平面内的任意一个向量 $\boldsymbol{p}$ 都可以用两个不共线的向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 来表示（平面向量基本定理）．类似地，任意一个空间向量能否用任意三个不共面的向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 来表示呢？

我们先从空间中三个不共面的向量两两垂直这一特殊情况开始讨论．

如图 1.2-1，设 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ 是空间中三个两两垂直的向量，且表示它们的有向线段有公共起点 O．对于任意一个空间向量 $\boldsymbol{p}=\overrightarrow{OP}$，设 $\overrightarrow{OQ}$ 为 $\overrightarrow{OP}$ 在 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$ 所确定的平面上的投影向量，则 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{QP}$．又向量 $\overrightarrow{QP}$，$\boldsymbol{k}$ 共线，因此存在唯一的实数 z，使得 $\overrightarrow{QP}=z\boldsymbol{k}$，从而

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OQ}+z\boldsymbol{k}.$$

而在 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$ 所确定的平面上，由平面向量基本定理可知，存在唯一的有序实数对 $(x,\ y)$，使得

$$\overrightarrow{OQ}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}.$$

从而

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OQ}+z\boldsymbol{k}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}.$$

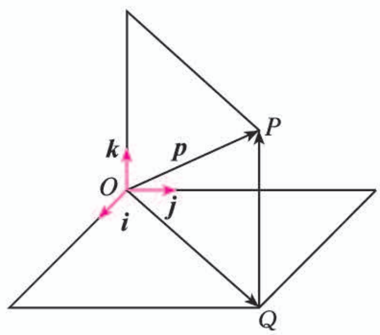


图 1.2-1

因此，如果 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ 是空间三个两两垂直的向量，那么对任意一个空间向量 $\boldsymbol{p}$，存在唯一的有序实数组 $(x,\ y,\ z)$，使得

$$\boldsymbol{p}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}.$$

我们称 $x\boldsymbol{i}$，$y\boldsymbol{j}$，$z\boldsymbol{k}$ 分别为向量 $\boldsymbol{p}$ 在 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ 上的分向量．

你能证明唯一性吗？

探究

在空间中，如果用任意三个不共面的向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 代替两两垂直的向量 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$，你能得出类似的结论吗？

类似平面向量基本定理，我们有空间向量基本定理．

定理　如果三个向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 不共面，那么对任意一个空间向量 $\boldsymbol{p}$，存在唯一的有序实数组 $(x,\ y,\ z)$，使得

$$\boldsymbol{p}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}+z\boldsymbol{c}.$$

请你自己给出空间向量基本定理的证明．

由此可知，如果三个向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 不共面，那么所有空间向量组成的集合就是$\{\boldsymbol{p} \mid \boldsymbol{p}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}+z\boldsymbol{c},\ x,\ y,\ z\in\mathbf{R}\}$. 这个集合可看作由向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 生成的，我们把 $\{\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}\}$ 叫做空间的一个**基底**（base），$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 都叫做**基向量**（base vectors）. 空间任意三个不共面的向量都可以构成空间的一个基底.

特别地，如果空间的一个基底中的三个基向量两两垂直，且长度都为 1，那么这个基底叫做**单位正交基底**，常用 $\{\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j},\ \boldsymbol{k}\}$ 表示. 由空间向量基本定理可知，对空间中的任意向量 $\boldsymbol{a}$，均可以分解为三个向量 $x\boldsymbol{i}$，$y\boldsymbol{j}$，$z\boldsymbol{k}$，使 $\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$. 像这样，把一个空间向量分解为三个两两垂直的向量，叫做把空间向量进行**正交分解**.

由空间向量基本定理可知，如果把三个不共面的向量作为空间的一个基底，那么所有空间向量都可以用三个基向量表示出来. 进一步地，所有空间向量间的运算都可以转化为基向量间的运算，这为解决问题带来了方便.

例 1 如图 1.2-2，M 是四面体 $OABC$ 的棱 BC 的中点，点 N 在线段 OM 上，点 P 在线段 AN 上，且 $MN=\frac{1}{2}ON$，$AP=\frac{3}{4}AN$，用向量 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$ 表示 $\overrightarrow{OP}$.

分析： $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$ 是三个不共面的向量，它们构成空间的一个基底 $\{\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OB},\ \overrightarrow{OC}\}$，$\overrightarrow{OP}$ 可以用基底 $\{\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OB},\ \overrightarrow{OC}\}$ 表示出来.

解：

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP}&=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OA}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AN}\\&=\overrightarrow{OA}+\frac{3}{4}(\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OA})\\&=\overrightarrow{OA}+\frac{3}{4}\overrightarrow{ON}-\frac{3}{4}\overrightarrow{OA}\\&=\frac{1}{4}\overrightarrow{OA}+\frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}\right)\\&=\frac{1}{4}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{OC}.\end{aligned}$$

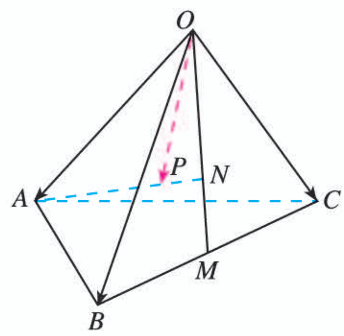


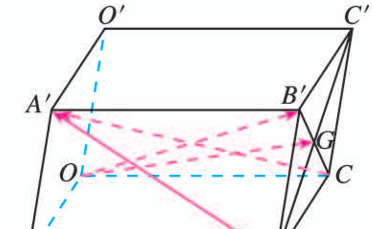
图 1.2-2

练习

1. 已知 $\{\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}\}$ 是空间的一个基底，从 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 中选哪一个向量，一定可以与向量 $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{q}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 构成空间的另一个基底?
2. 已知 O，A，B，C 为空间的四个点，且向量 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$ 不构成空间的一个基底，那么点 O，A，B，C 是否共面?
3. 如图，已知平行六面体 $OABC\text{-}O'A'B'C'$，点 G 是侧面 $BB'C'C$ 的中心，且 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OO'}=\boldsymbol{c}$.

   (1) $\{\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}\}$ 是否构成空间的一个基底?

   (2) 如果 $\{\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}\}$ 构成空间的一个基底，那么用它表示下列向量：$\overrightarrow{OB'}$，$\overrightarrow{BA'}$，$\overrightarrow{CA'}$，$\overrightarrow{OG}$.



（第 3 题）

例 2 如图 1.2-3，在平行六面体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=4$，$AD=4$，$AA_1=5$，$\angle DAB=60^\circ$，$\angle BAA_1=60^\circ$，$\angle DAA_1=60^\circ$，M，N 分别为 D_1C_1，C_1B_1 的中点．求证 $MN\perp AC_1$．

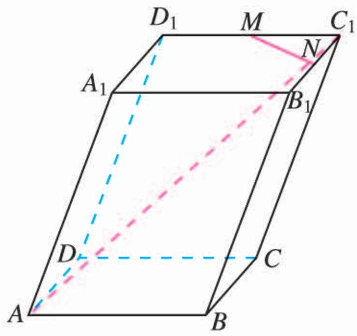


图 1.2-3

分析： 要证 $MN\perp AC_1$，只需证明 $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{AC_1}=0$．由已知，$\{\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{AA_1}\}$ 可构成空间的一个基底．把 $\overrightarrow{MN}$ 和 $\overrightarrow{AC_1}$ 分别用基底表示，然后计算 $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{AC_1}$ 即可．

证明： 设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AA_1}=\boldsymbol{c}$，这三个向量不共面，$\{\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}\}$ 构成空间的一个基底，我们用它们表示 $\overrightarrow{MN}$，$\overrightarrow{AC_1}$，则

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MC_1}+\overrightarrow{C_1N}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b},$$

$$\overrightarrow{AC_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC_1}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c},$$

所以

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{AC_1}&=\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}\right)\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\\&=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}\\&=\frac{1}{2}\times4^2+\frac{1}{2}\times4^2\times\cos 60^\circ+\frac{1}{2}\times4\times5\times\cos 60^\circ-\frac{1}{2}\times4^2\times\cos 60^\circ-\\&\quad\ \frac{1}{2}\times4^2-\frac{1}{2}\times4\times5\times\cos 60^\circ\\&=0.\end{aligned}$$

所以 $MN\perp AC_1$．

例 3 如图 1.2-4，正方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$ 的棱长为 1，E，F，G 分别为 $C'D'$，$A'D'$，$D'D$ 的中点．

(1) 求证：$EF/\!/AC$；

(2) 求 CE 与 AG 所成角的余弦值．

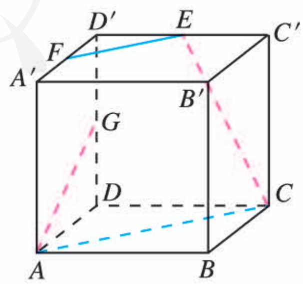


图 1.2-4

分析： (1) 要证明 $EF/\!/AC$，只需证明 $\overrightarrow{EF}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 共线．设 $\overrightarrow{DA}=\boldsymbol{i}$，$\overrightarrow{DC}=\boldsymbol{j}$，$\overrightarrow{DD'}=\boldsymbol{k}$，则 $\{\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j},\ \boldsymbol{k}\}$ 构成空间的一个单位正交基底，把 $\overrightarrow{EF}$ 和 $\overrightarrow{AC}$ 分别用基向量表示，作相应的运算证明它们共线即可．(2) 要求 CE 与 AG 所成角的余弦值，只需求 $\overrightarrow{CE}$，$\overrightarrow{AG}$ 所成角的余弦值即可．

（1）**证明**：设 $\overrightarrow{DA}=\boldsymbol{i}$，$\overrightarrow{DC}=\boldsymbol{j}$，$\overrightarrow{DD'}=\boldsymbol{k}$，则$\{\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j},\ \boldsymbol{k}\}$构成空间的一个单位正交基底．所以

$$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{D'F}-\overrightarrow{D'E}=\frac{1}{2}\boldsymbol{i}-\frac{1}{2}\boldsymbol{j}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}),$$

$$\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DC}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}.$$

所以 $\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$.

所以 $EF/\!/AC$.

（2）**解**：因为

$$\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{CC'}+\overrightarrow{C'E}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k},$$

$$\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DG}=-\boldsymbol{i}+\frac{1}{2}\boldsymbol{k},$$

所以

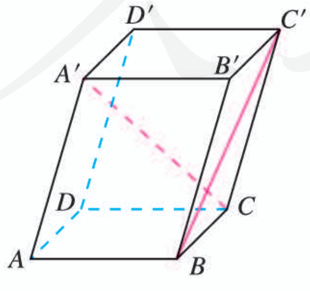
$$\cos\langle\overrightarrow{CE},\ \overrightarrow{AG}\rangle=\frac{\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{AG}}{|\overrightarrow{CE}|\ |\overrightarrow{AG}|}=\frac{\left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}\right)\cdot\left(-\boldsymbol{i}+\frac{1}{2}\boldsymbol{k}\right)}{\frac{\sqrt{5}}{2}\times\frac{\sqrt{5}}{2}}$$

$$=\frac{2}{5}.$$

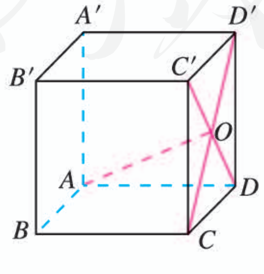
所以 CE 与 AG 所成角的余弦值为$\frac{2}{5}$.

练习

1. 已知四面体 $OABC$，$OB=OC$，$\angle AOB=\angle AOC=\theta$．求证：$OA\perp BC$.
2. 如图，在平行六面体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$ 中，$AB=2$，$AD=2$，$AA'=3$，$\angle BAD=\angle BAA'=\angle DAA'=60°$．求 BC'与 CA'所成角的余弦值.



（第 2 题）



（第 3 题）

3. 如图，已知正方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$，CD'和 DC'相交于点 O，连接 AO，求证 $AO\perp CD'$.

习题 1.2

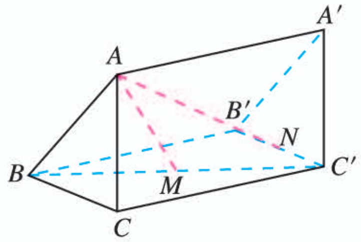
复习巩固

1. 如果向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 与任何向量都不能构成空间的一个基底，那么 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 间应有什么关系？

2. 若 $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$ 构成空间的一个基底，则下列向量不共面的是（　　）.

   (A) $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$　　(B) $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$

   (C) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$　　(D) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{c}$



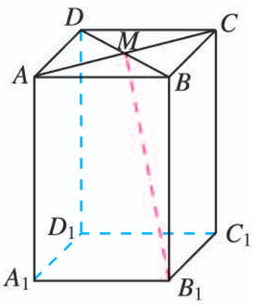
（第 4 题）

3. 已知四面体 $OABC$，M，N 分别是棱 OA，BC 的中点，且 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$，用 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 表示向量 $\overrightarrow{MN}$.

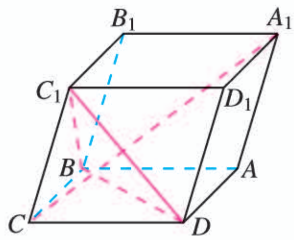
4. 如图，在空间平移 $\triangle ABC$ 到 $\triangle A'B'C'$，连接对应顶点．设 $\overrightarrow{AA'}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{c}$，$M$ 是 BC' 的中点，N 是 $B'C'$ 的中点，用基底 $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$ 表示向量 $\overrightarrow{AM}$，$\overrightarrow{AN}$.

综合运用

5. 如图，在长方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，M 是 AC 与 BD 的交点．若 $D_1A_1=2$，$D_1C_1=2$，$D_1D=3$，求 B_1M 的长.



（第 5 题）



（第 6 题）

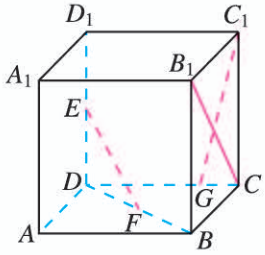
6. 如图，平行六面体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的底面 $ABCD$ 是菱形，且 $\angle C_1CB=\angle C_1CD=\angle BCD=60°$，$CD=CC_1$，求证：$CA_1\perp$ 平面 C_1BD.

拓广探索

7. 如图，在棱长为 1 的正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，E，F 分别为 DD_1，BD 的中点，点 G 在 CD 上，且 $CG=\dfrac{1}{4}CD$.

   (1) 求证：$EF\perp B_1C$；

   (2) 求 EF 与 C_1G 所成角的余弦值.



（第 7 题）

8. 已知四面体中三组相对棱的中点间的距离都相等，求证：这个四面体相对的棱两两垂直.

1.3 空间向量及其运算的坐标表示

学习了空间向量基本定理，建立了“空间基底”的概念，我们就可以利用基底表示任意一个空间向量，进而把空间向量的运算转化为基向量的运算．所以，基底概念的引入为几何问题代数化奠定了基础．

在平面向量中，我们以平面直角坐标系中与 x 轴、y 轴方向相同的两个单位向量 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$ 为基底，建立了向量的坐标与点的坐标的一一对应关系，从而把平面向量的运算化归为数的运算．类似地，为了把空间向量的运算化归为数的运算，能否利用空间向量基本定理和空间的单位正交基底，建立空间直角坐标系，进而建立空间向量的坐标与空间点的坐标的一一对应呢？下面我们就来研究这个问题．

1.3.1 空间直角坐标系

我们知道，平面直角坐标系由平面内两条互相垂直、原点重合的数轴组成．利用单位正交基底概念，我们还可以这样理解平面直角坐标系：如图 1.3-1，在平面内选定一点 O 和一个单位正交基底 $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}\}$，以 O 为原点，分别以 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$ 的方向为正方向、以它们的长为单位长度建立两条数轴：x 轴、y 轴，那么我们就建立了一个平面直角坐标系．

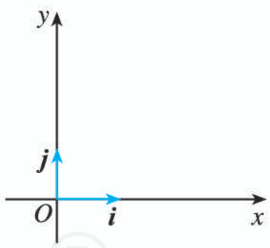


图 1.3-1

类似地，在空间选定一点 O 和一个单位正交基底 $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$（图 1.3-2）．以点 O 为原点，分别以 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ 的方向为正方向、以它们的长为单位长度建立三条数轴：x 轴、y 轴、z 轴，它们都叫做**坐标轴**．这时我们就建立了一个**空间直角坐标系** $Oxyz$，O 叫做**原点**，$\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ 都叫做**坐标向量**，通过每两条坐标轴的平面叫做**坐标平面**，分别称为 Oxy 平面，Oyz 平面，Ozx 平面，它们把空间分成八个部分．

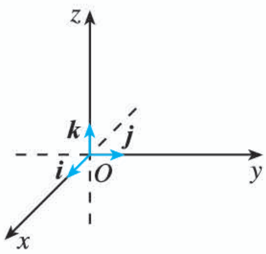


图 1.3-2

画空间直角坐标系 $Oxyz$ 时，一般使 $\angle xOy=135^\circ$（或 45°），$\angle yOz=90^\circ$．

在空间直角坐标系中，让右手拇指指向 x 轴的正方向，食指

指向 y 轴的正方向，如果中指指向 z 轴的正方向，则称这个坐标系为**右手直角坐标系**. 本书建立的坐标系都是右手直角坐标系.

探究

在平面直角坐标系中，每一个点和向量都可用一对有序实数（即它的坐标）表示. 对空间直角坐标系中的每一个点和向量，是否也有类似的表示呢？

在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中（图 1.3-3），$\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ 为坐标向量，对空间任意一点 A，对应一个向量 $\overrightarrow{OA}$，且点 A 的位置由向量 $\overrightarrow{OA}$ 唯一确定，由空间向量基本定理，存在唯一的有序实数组 (x, y, z)，使

$$\overrightarrow{OA}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}.$$

在单位正交基底 $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ 下与向量 $\overrightarrow{OA}$ 对应的有序实数组 (x, y, z)，叫做点 A 在空间直角坐标系中的坐标，记作 $A(x, y, z)$，其中 x 叫做点 A 的**横坐标**，y 叫做点 A 的**纵坐标**，z 叫做点 A 的**竖坐标**.

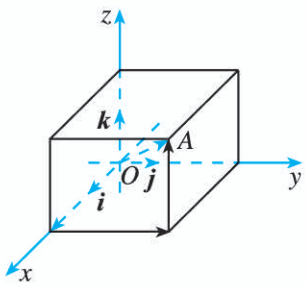


图 1.3-3

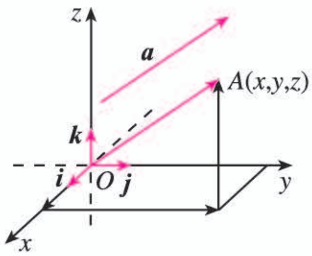


图 1.3-4

在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中，给定向量 $\boldsymbol{a}$，作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$（图 1.3-4）. 由空间向量基本定理，存在唯一的有序实数组 (x, y, z)，使

$$\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}.$$

有序实数组 (x, y, z) 叫做 $\boldsymbol{a}$ 在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中的坐标，上式可简记作

$$\boldsymbol{a}=(x, y, z).$$

这样，在空间直角坐标系中，空间中的点和向量都可以用三个有序实数表示.

> 符号 (x, y, z) 具有双重意义，它既可以表示向量，也可以表示点，在表述时要注意区分.

探究

在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中，对空间任意一点 A，或任意一个向量 $\overrightarrow{OA}$，你能借助几何直观确定它们的坐标 (x, y, z) 吗？

事实上，如图 1.3-5，过点 A 分别作垂直于 x 轴、y 轴和 z 轴的平面，依次交 x 轴、y 轴和 z 轴于点 B，C 和 D. 可以证明 $\overrightarrow{OA}$ 在 x 轴、y 轴、z 轴上的投影向量分别为 $\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{OD}$，且 $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}$. 设点 B，C 和 D 在 x 轴、y 轴和 z 轴上的坐标分别是 x，y 和 z，那么点 A（向量 $\overrightarrow{OA}$）的坐标为 (x, y, z).

？ 你能给出证明吗？

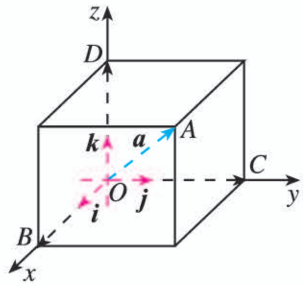


图 1.3-5

例 1 如图 1.3-6，在长方体 $OABC\text{-}D'A'B'C'$ 中，$OA=3$，$OC=4$，$OD'=2$，以 $\left\{\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}, \frac{1}{4}\overrightarrow{OC}, \frac{1}{2}\overrightarrow{OD'}\right\}$ 为单位正交基底，建立如图所示的空间直角坐标系 $Oxyz$.

（1）写出 D'，C，A'，B' 四点的坐标；

（2）写出向量 $\overrightarrow{A'B'}$，$\overrightarrow{B'B}$，$\overrightarrow{A'C'}$，$\overrightarrow{AC'}$ 的坐标.

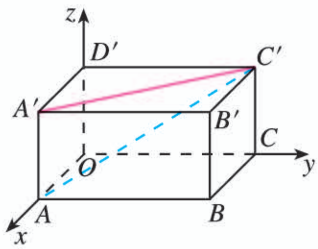


图 1.3-6

解：（1）点 D' 在 z 轴上，且 $OD'=2$，所以 $\overrightarrow{OD'}=0\boldsymbol{i}+0\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$. 所以点 D' 的坐标是 $(0, 0, 2)$.

同理，点 C 的坐标是 $(0, 4, 0)$.

点 A' 在 x 轴、y 轴、z 轴上的射影分别为 A，O，D'，它们在坐标轴上的坐标分别为 3，0，2，所以点 A' 的坐标是 $(3, 0, 2)$.

点 B' 在 x 轴、y 轴、z 轴上的射影分别为 A，C，D'，它们在坐标轴上的坐标分别为 3，4，2，所以点 B' 的坐标是 $(3, 4, 2)$.

（2）$\overrightarrow{A'B'}=\overrightarrow{OC}=0\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}+0\boldsymbol{k}=(0, 4, 0)$；

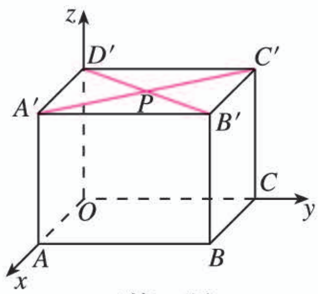
$\overrightarrow{B'B}=-\overrightarrow{OD'}=0\boldsymbol{i}+0\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}=(0, 0, -2)$；

$\overrightarrow{A'C'}=\overrightarrow{A'D'}+\overrightarrow{D'C'}=-3\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}+0\boldsymbol{k}=(-3, 4, 0)$；

$\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CC'}=-3\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}=(-3, 4, 2)$.

练习

1. 在空间直角坐标系中标出下列各点：
   $A(0, 2, 4)$，$B(1, 0, 5)$，$C(0, 2, 0)$，$D(1, 3, 4)$.
2. 在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中，
   （1）哪个坐标平面与 x 轴垂直？哪个坐标平面与 y 轴垂直？哪个坐标平面与 z 轴垂直？
   （2）写出点 $P(2, 3, 4)$ 在三个坐标平面内的射影的坐标.
   （3）写出点 $P(1, 3, 5)$ 关于原点成中心对称的点的坐标.
3. 在长方体 $OABC\text{-}D'A'B'C'$ 中，$OA=3$，$OC=4$，$OD'=3$，$A'C'$ 与 $B'D'$ 相交于点 P，建立如图所示的空间直角坐标系 $Oxyz$.



（第 3 题）

(1) 写出点 C，B'，P 的坐标；

(2) 写出向量 $\overrightarrow{BB'}$，$\overrightarrow{A'C'}$ 的坐标.

4. 已知点 B 是点 $A(3, 4, 5)$ 在坐标平面 Oxy 内的射影，求 $|\overrightarrow{OB}|$.

1.3.2 空间向量运算的坐标表示

探究

有了空间向量的坐标表示，你能类比平面向量的坐标运算，得出空间向量运算的坐标表示并给出证明吗？

设

$$\boldsymbol{a}=(a_1, a_2, a_3), \boldsymbol{b}=(b_1, b_2, b_3),$$

与平面向量运算的坐标表示一样，我们有：

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3),$$

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(a_1-b_1, a_2-b_2, a_3-b_3),$$

$$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3), \lambda\in\mathbf{R},$$

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3.$$

下面我们证明空间向量数量积运算的坐标表示.

设 $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ 为空间的一个单位正交基底，则

$$\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}, \boldsymbol{b}=b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k},$$

所以

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k})\cdot(b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k}).$$

利用向量数量积的分配律以及

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=1, \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}=0,$$

得

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3.$$

> 其他运算的坐标表示可以类似证明，请同学们自己完成.

由上述结论可知，空间向量运算的坐标表示与平面向量运算的坐标表示是完全一致的. 例如，我们有：

一个空间向量的坐标等于表示此向量的有向线段的终点坐标减去起点坐标.

类似平面向量运算的坐标表示，我们还可以得到：

当 $\boldsymbol{b}\neq\mathbf{0}$ 时，$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}\Leftrightarrow a_1=\lambda b_1, a_2=\lambda b_2, a_3=\lambda b_3(\lambda\in\mathbf{R})$；

$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\Leftrightarrow a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0$；

$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$；

$$\cos\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}.$$

探究

你能利用空间向量运算的坐标表示推导空间两点间的距离公式吗?

如图 1.3-7 建立空间直角坐标系 $Oxyz$，设 $P_1(x_1, y_1, z_1)$，$P_2(x_2, y_2, z_2)$ 是空间中任意两点，则

$$\overrightarrow{P_1P_2}=\overrightarrow{OP_2}-\overrightarrow{OP_1}=(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1).$$

于是

$$|\overrightarrow{P_1P_2}|=\sqrt{\overrightarrow{P_1P_2}\cdot\overrightarrow{P_1P_2}}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

所以

$$P_1P_2=|\overrightarrow{P_1P_2}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

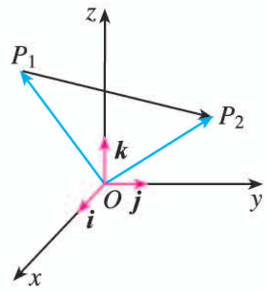


图 1.3-7

这就是**空间两点间的距离公式**.

将空间向量的运算与向量的坐标表示结合起来，不仅可以解决夹角和距离的计算问题，而且可以使一些问题的解决变得简单.

例 2 如图 1.3-8，在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，E，F 分别是 BB_1，D_1B_1 的中点. 求证 $EF\perp DA_1$.

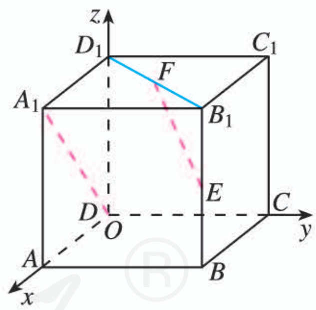


图 1.3-8

分析：要证明 $EF\perp DA_1$，只要证明 $\overrightarrow{EF}\perp\overrightarrow{DA_1}$，即证 $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{DA_1}=0$. 我们只要用坐标表示 $\overrightarrow{EF}$，$\overrightarrow{DA_1}$，并进行数量积运算即可.

证明：不妨设正方体的棱长为1，建立如图 1.3-8 所示的空间直角坐标系 $Oxyz$，则

$$E\left(1, 1, \frac{1}{2}\right), F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right),$$

所以 $\overrightarrow{EF}=\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

又 $A_1(1, 0, 1)$，$D(0, 0, 0)$，

所以 $\overrightarrow{DA_1}=(1, 0, 1)$.

所以 $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{DA_1}=\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\cdot(1, 0, 1)=0$.

所以 $\overrightarrow{EF}\perp\overrightarrow{DA_1}$，即 $EF\perp DA_1$.

> ?
>
> 你能从本题的解答中体会到根据问题的特点，建立适当的空间直角坐标系，用向量表示相关元素，并通过向量及其坐标的运算求解问题的基本思路吗?

例 3 如图 1.3-9，在棱长为 1 的正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，M 为 BC_1 的中点，E_1，F_1 分别在棱 A_1B_1，C_1D_1 上，$B_1E_1=\frac{1}{4}A_1B_1$，$D_1F_1=\frac{1}{4}C_1D_1$.

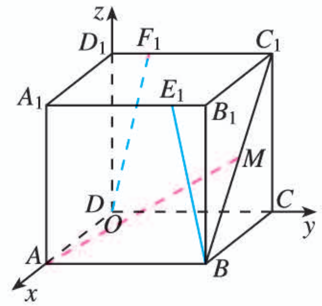


图 1.3-9

(1) 求 AM 的长.

(2) 求 BE_1 与 DF_1 所成角的余弦值.

分析：(1) 利用条件建立适当的空间直角坐标系，写出点 A，M 的坐标，利用空间两点间的距离公式求出 AM 的长. (2) BE_1 与 DF_1 所成的角就是 $\overrightarrow{BE_1}$，$\overrightarrow{DF_1}$ 所成的角或它的补角. 因此，可以通过 $\overrightarrow{BE_1}$，$\overrightarrow{DF_1}$ 的坐标运算得到结果.

解：(1) 建立如图 1.3-9 所示的空间直角坐标系 $Oxyz$，则点 A 的坐标为 $(1,0,0)$，点 M 的坐标为 $\left(\frac{1}{2},1,\frac{1}{2}\right)$. 于是

$$AM=\sqrt{\left(\frac{1}{2}-1\right)^2+(1-0)^2+\left(\frac{1}{2}-0\right)^2}=\frac{\sqrt{6}}{2}.$$

(2) 由已知，得

$$B(1,1,0),\ E_1\left(1,\frac{3}{4},1\right),\ D(0,0,0),\ F_1\left(0,\frac{1}{4},1\right),$$

所以 $\overrightarrow{BE_1}=\left(1,\frac{3}{4},1\right)-(1,1,0)=\left(0,-\frac{1}{4},1\right)$，

$$\overrightarrow{DF_1}=\left(0,\frac{1}{4},1\right)-(0,0,0)=\left(0,\frac{1}{4},1\right),$$

$$|\overrightarrow{BE_1}|=\frac{\sqrt{17}}{4},\quad |\overrightarrow{DF_1}|=\frac{\sqrt{17}}{4}.$$

所以

$$\overrightarrow{BE_1}\cdot\overrightarrow{DF_1}=0\times0+\left(-\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\right)+1\times1=\frac{15}{16}.$$

所以

$$\cos\langle\overrightarrow{BE_1},\overrightarrow{DF_1}\rangle=\frac{\overrightarrow{BE_1}\cdot\overrightarrow{DF_1}}{|\overrightarrow{BE_1}|\,|\overrightarrow{DF_1}|}=\frac{\frac{15}{16}}{\frac{\sqrt{17}}{4}\times\frac{\sqrt{17}}{4}}=\frac{15}{17}.$$

所以，BE_1 与 DF_1 所成角的余弦值是 $\frac{15}{17}$.

练习

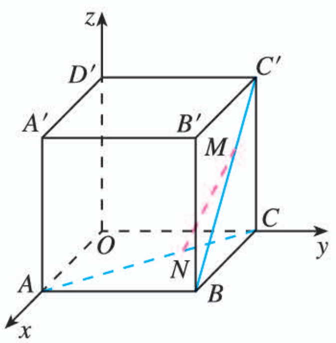
1. 已知 $\boldsymbol{a}=(-3,2,5)$，$\boldsymbol{b}=(1,5,-1)$，求：

   (1) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$；　(2) $6\boldsymbol{a}$；　(3) $3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$；　(4) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$.

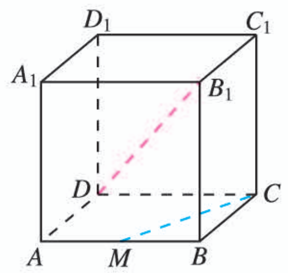
2. 已知 $\boldsymbol{a}=(2,-1,3)$，$\boldsymbol{b}=(-4,2,x)$，且 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$. 求 x 的值.

3. 在 z 轴上求一点 M，使点 M 到点 $A(1,0,2)$ 与点 $B(1,-3,1)$ 的距离相等.

4. 如图，正方体 $OABC\text{-}D'A'B'C'$ 的棱长为 a，点 N，M 分别在 AC，BC' 上，$AN=2CN$，$BM=2MC'$，求 MN 的长.



（第 4 题）



（第 5 题）

5. 如图，在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，M 是 AB 的中点，求 DB_1 与 CM 所成角的余弦值.

习题 1.3

复习巩固

1. 在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中，三个非零向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 分别平行于 x 轴、y 轴、z 轴，它们的坐标各有什么特点？

2. $M(x,y,z)$ 是空间直角坐标系 $Oxyz$ 中的一点，写出满足下列条件的点的坐标：

   (1) 与点 M 关于 x 轴对称的点；

   (2) 与点 M 关于 y 轴对称的点；

   (3) 与点 M 关于 z 轴对称的点；

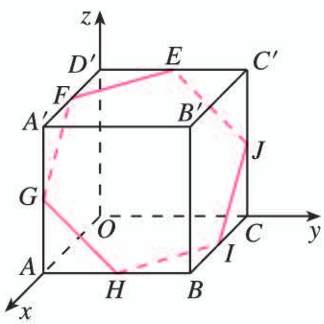
   (4) 与点 M 关于原点对称的点.

3. 如图，正方体 $OABC\text{-}D'A'B'C'$ 的棱长为 a，E，F，G，H，I，J 分别是棱 $C'D'$，$D'A'$，$A'A$，AB，BC，CC' 的中点，写出正六边形 $EFGHIJ$ 各顶点的坐标.

4. 先在空间直角坐标系中标出 A，B 两点，再求它们之间的距离：

   (1) $A(2,3,5)$，$B(3,1,4)$；

   (2) $A(6,0,1)$，$B(3,5,7)$.



（第 3 题）

5. 已知 $\boldsymbol{a}=(2, -3, 1)$，$\boldsymbol{b}=(2, 0, 3)$，$\boldsymbol{c}=(0, 0, 2)$. 求：

(1) $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$；(2) $\boldsymbol{a}+6\boldsymbol{b}-8\boldsymbol{c}$.

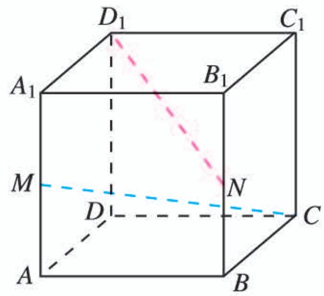
综合运用

6. 求证：以 $A(4, 1, 9)$，$B(10, -1, 6)$，$C(2, 4, 3)$ 为顶点的三角形是等腰直角三角形.

7. 已知 $A(3, 5, -7)$，$B(-2, 4, 3)$，求 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BA}$，线段 AB 的中点坐标及线段 AB 的长.

拓广探索

8. 如图，在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，M，N 分别为棱 A_1A 和 B_1B 的中点，求 CM 和 D_1N 所成角的余弦值.



（第 8 题）

9. $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$ 是空间的一个单位正交基底，向量 $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{c}$，$\{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$ 是空间的另一个基底，用基底 $\{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$ 表示向量 $\boldsymbol{p}$.

阅读与思考

向量概念的推广与应用

我们知道，在平面内取定单位正交基底建立坐标系后，任意一个平面向量，都可以用二元有序实数对 (a_1, a_2) 表示. 平面向量又称为二维向量. 给定空间一个单位正交基底，任意一个空间向量，都可用三元有序实数组 (a_1, a_2, a_3) 表示. 空间向量又称为三维向量. 二维向量、三维向量统称为几何向量.

在实际问题中，经常会遇到一些需要用更多实数来表示的量. 比如：期末进行了五门学科的考试，每个学生的成绩可用顺序排列的五科成绩来表示；在汽车生产线上，对装配好的汽车进行制动距离、最高车速、每 100 千米油耗、滑行距离、噪声、废气排放量等六项指标的测试，那么每辆新车质量可用六元有序实数组 $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$ 表示.

一般地，n 元有序实数组 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 称为 n 维向量，它是几何向量的推广. n 维向量的全体构成的集合，赋予相应的结构后，叫做 n 维向量空间. 它的每一个元素可看成 n 维向量空间的一点.

类似二维向量，对于 n 维向量，也可定义两个向量的加法运算、减法运算、数乘运算、两个向量的数量积、向量的长度（模）、两点间的“距离”等：

设 $\boldsymbol{a}=(a_1, a_2, \cdots, a_n)$，$\boldsymbol{b}=(b_1, b_2, \cdots, b_n)$，则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}&=(a_1, a_2, \cdots, a_n)\pm(b_1, b_2, \cdots, b_n)\\&=(a_1\pm b_1, a_2\pm b_2, \cdots, a_n\pm b_n);\end{aligned}$$

$$\lambda\boldsymbol{a}=\lambda(a_1, a_2, \cdots, a_n)=(\lambda a_1, \lambda a_2, \cdots, \lambda a_n), \lambda\in\mathbf{R};$$

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(a_1, a_2, \cdots, a_n)\cdot(b_1, b_2, \cdots, b_n)=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n;$$

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}.$$

n 维向量空间中 $A(a_1, a_2, \cdots, a_n)$，$B(b_1, b_2, \cdots, b_n)$ 两点间的“距离”

$$d_{AB}=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+\cdots+(b_n-a_n)^2}.$$

利用向量的运算可以解决许多实际问题.

例如，为了研究某种商品的销售量是否随季节的变化出现规律性的变化，采集了 5 年内这种商品每月销售量的数据. 每年此商品的销售量可用 12 个月的销售量所形成的 12 维向量表示. 不妨设 5 年的销售向量分别为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}&=(a_1, a_2, \cdots, a_{12}),\\\boldsymbol{b}&=(b_1, b_2, \cdots, b_{12}),\\\boldsymbol{c}&=(c_1, c_2, \cdots, c_{12}),\\\boldsymbol{d}&=(d_1, d_2, \cdots, d_{12}),\\\boldsymbol{e}&=(e_1, e_2, \cdots, e_{12}).\end{aligned}$$

计算这 5 年的月平均销售向量

$$\frac{1}{5}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}+\boldsymbol{e}).$$

观察这个向量的 12 个分量，就可看出这 5 年内月平均销售量是否与季节的变化有关.

上面是一个应用向量的加法与数乘运算的例子，下面我们再来看用“距离”概念解决实际问题的例子.

依据“距离”来分类是一种常用的分类方法. 计算每个向量与标准点的距离，与哪个标准点的距离最近就归哪一类. 请看下面的具体例子.

翱翔校服有限公司根据以往制作校服的经验，得出适用于本地区高一新生的 8 种校服标准型号及相应的测量指标参数值，如表 1 所示.

表 1

型号	身高/cm	胸围/cm	腰围/cm	肩宽/cm
XXS	150	76	62	34
XS	155	80	66	36

续表

型号	身高/cm	胸围/cm	腰围/cm	肩宽/cm
S	160	84	70	38
M	165	88	74	40
L	170	92	78	42
XL	175	96	82	44
XXL	180	100	86	46
XXXL	185	104	90	48

为了给树人中学 1 000 名高一新生制作校服，翱翔公司测量了每名学生的身高、胸围、腰围、肩宽等，得到 1 000 组（每组 4 个）数据，如何根据这些数据得出 8 种标准型号的服装各应制作的套数呢？

我们把测量得到的数据按身高、胸围、腰围、肩宽的顺序排列，则每名学生的身材可以用四维向量表示，并且可以把它看作四维向量空间中的一个点．这样，上面的问题用数学语言来描述，就是如何将 1 000 个点分成 8 类．一种常用的分类方法是依据“距离”来分类．8 种标准型号为 8 个标准点，用两点间距离的计算公式，计算每个学生的身材点与 8 个标准点的距离，与哪个标准点的距离最近就归入哪一类．例如，某同学身高为 172 cm，胸围 95 cm，腰围 80 cm，肩宽 43 cm，则该同学的身材点可以表示为 P（172，95，80，43）．设 8 种标准型号分别为点 A（150，76，62，34），B（155，80，66，36），C（160，84，70，38），D（165，88，74，40），E（170，92，78，42），F（175，96，82，44），G（180，100，86，46），H（185，104，90，48），分别计算点 P 与点 A，B，C，D，E，F，G，H 的距离，可得 $d_{PA}\approx 35.4$，$d_{PB}\approx 27.5$，$d_{PC}\approx 19.7$，$d_{PD}\approx 12.0$，$d_{PE}\approx 4.2$，$d_{PF}\approx 3.9$，$d_{PG}\approx 11.6$，$d_{PH}\approx 19.4$．因为 d_{PF} 最小，所以该同学的身材点应归类为 XL 号．

翱翔校服有限公司只要设计一个小程序，将测量所得的 1 000 组数据输入计算机，就可以迅速计算出 1 000 名学生属于每一类的点数，进而得到 8 种标准型号的服装各应制作的套数．

从以上两个例子可以看出，由有序实数组构成的向量，比几何向量的应用更加广泛．在日常生活和科学研究中，有许多量都可由有序实数组构成的向量来表示，并可用向量理论研究这些量的性质．

1.4 空间向量的应用

我们已经把向量从平面推广到空间，并利用空间向量解决了一些有关空间位置关系和度量的问题. 我们发现，建立空间向量与几何要素的对应关系是利用空间向量解决立体几何问题的关键. 本节我们进一步运用空间向量研究立体几何中有关直线、平面的位置关系和度量问题.

1.4.1 用空间向量研究直线、平面的位置关系

1. 空间中点、直线和平面的向量表示

我们知道，点、直线和平面是空间的基本图形，点、线段和平面图形等是组成空间几何体的基本元素. 因此，为了用空间向量解决立体几何问题，首先要用向量表示空间中的点、直线和平面.

思考

如何用向量表示空间中的一个点?

如图 1.4-1，在空间中，我们取一定点 O 作为基点，那么空间中任意一点 P 就可以用向量 $\overrightarrow{OP}$ 来表示. 我们把向量 $\overrightarrow{OP}$ 称为点 P 的位置向量.

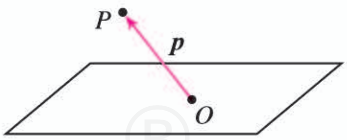


图 1.4-1

思考

我们知道，空间中给定一个点 A 和一个方向就能唯一确定一条直线 l. 如何用向量表示直线 l?

用向量表示直线 l，就是要利用点 A 和直线 l 的方向向量表示直线上的任意一点.

如图 1.4-2，$\boldsymbol{a}$ 是直线 l 的方向向量，在直线 l 上取 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，设 P 是直线 l 上的任意一点，由向量共线的条件可知，点 P 在直线 l 上的充要条件是存在实数 t，使得

$$\overrightarrow{AP}=t\boldsymbol{a}，即\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AB}.$$

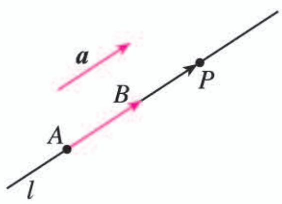


图 1.4-2

进一步地，如图 1.4-3，取定空间中的任意一点 O，可以得到点 P 在直线 l 上的充要条件是存在实数 t，使

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+t\boldsymbol{a}, \quad ①$$

将 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$ 代入①式，得

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{AB}. \quad ②$$

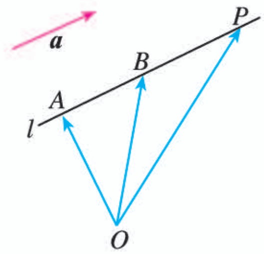


图 1.4-3

①式和②式都称为空间直线的向量表示式. 由此可知，空间任意直线由直线上一点及直线的方向向量唯一确定.

你能证明这个结论吗?

思考

一个定点和两个定方向能否确定一个平面? 进一步地，一个定点和一个定方向能否确定一个平面? 如果能确定，如何用向量表示这个平面?

我们知道，平面 α 可以由 α 内两条相交直线确定. 如图 1.4-4，设两条直线相交于点 O，它们的方向向量分别为 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，P 为平面 α 内任意一点，由平面向量基本定理可知，存在唯一的有序实数对 (x, y)，使得

$$\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}.$$

这样，点 O 与向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 不仅可以确定平面 α，还可以具体表示出 α 内的任意一点. 这种表示在解决几何问题时有重要作用.

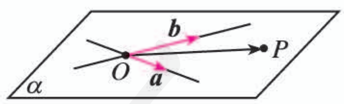


图 1.4-4

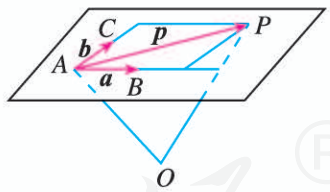


图 1.4-5

进一步地，如图 1.4-5，取定空间任意一点 O，可以得到，空间一点 P 位于平面 ABC 内的充要条件是存在实数 x，y，使

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}. \quad ③$$

你能证明这个结论吗?

我们把③式称为空间平面 ABC 的向量表示式. 由此可知，空间中任意平面由空间一点及两个不共线向量唯一确定.

我们知道，给定空间一点 A 和一条直线 l，则过点 A 且垂直于直线 l 的平面是唯一确定的. 由此得到启发，我们

可以利用点 A 和直线 l 的方向向量来确定平面.

如图 1.4-6，直线 $l\perp\alpha$. 取直线 l 的方向向量 $\boldsymbol{a}$，我们称向量 $\boldsymbol{a}$ 为平面 α 的**法向量**(normal vector). 给定一个点 A 和一个向量 $\boldsymbol{a}$，那么过点 A，且以向量 $\boldsymbol{a}$ 为法向量的平面完全确定，可以表示为集合 $\{P\,|\,\boldsymbol{a}\cdot\overrightarrow{AP}=0\}$.

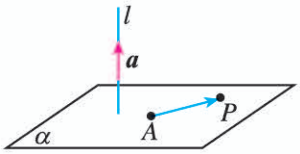


图 1.4-6

> ?
>
> 如果另有一条直线 $m\perp\alpha$，在直线 m 上任取向量 $\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 有什么关系?

例 1 如图 1.4-7，在长方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=4$，$BC=3$，$CC_1=2$，M 是 AB 的中点. 以 D 为原点，DA，DC，DD_1 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系.

(1) 求平面 BCC_1B_1 的法向量;

(2) 求平面 MCA_1 的法向量.

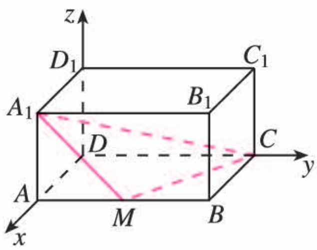


图 1.4-7

分析: (1) 平面 BCC_1B_1 与 y 轴垂直，其法向量可以直接写出; (2) 平面 MCA_1 可以看成由 $\overrightarrow{MC}$，$\overrightarrow{MA_1}$，$\overrightarrow{CA_1}$ 中的两个向量所确定，运用法向量与它们的垂直关系，可转化为数量积运算求得法向量.

解: (1) 因为 y 轴垂直于平面 BCC_1B_1，所以 $\boldsymbol{n}_1=(0，1，0)$是平面 BCC_1B_1 的一个法向量.

(2) 因为 $AB=4$，$BC=3$，$CC_1=2$，M 是 AB 的中点，所以 M，C，A_1 的坐标分别为 $(3，2，0)$，$(0，4，0)$，$(3，0，2)$. 因此

$$\overrightarrow{MC}=(-3，2，0)，\overrightarrow{MA_1}=(0，-2，2).$$

设 $\boldsymbol{n}_2=(x，y，z)$ 是平面 MCA_1 的法向量，则

$$\boldsymbol{n}_2\perp\overrightarrow{MC}，\boldsymbol{n}_2\perp\overrightarrow{MA_1}.$$

所以

$$\begin{cases}\boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{MC}=-3x+2y=0，\\ \boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{MA_1}=-2y+2z=0.\end{cases}$$

所以

$$\begin{cases}x=\dfrac{2}{3}z，\\ y=z.\end{cases}$$

取 $z=3$，则 $x=2$，$y=3$. 于是 $\boldsymbol{n}_2=(2，3，3)$ 是平面 MCA_1 的一个法向量.

> 求平面的法向量，通常只需要求出平面的一个法向量. 求直线的方向向量也是如此.

练习

1. 判断下列命题是否正确，正确的在括号内打“√”，错误的打“×”.

(1) 零向量不能作为直线的方向向量和平面的法向量； (　　)

(2) 若 $\boldsymbol{v}$ 是直线 l 的方向向量，则 $\lambda\boldsymbol{v}(\lambda\in\mathbf{R})$ 也是直线 l 的方向向量； (　　)

(3) 在空间直角坐标系中，$\boldsymbol{j}=(0,0,1)$ 是坐标平面 Oxy 的一个法向量. (　　)

2. 在平行六面体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AA_1}=\boldsymbol{c}$，$O$ 是 BD_1 与 B_1D 的交点. 以 $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$ 为空间的一个基底，求直线 OA 的一个方向向量.

3. 在长方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=4$，$BC=3$，$CC_1=2$. 以 D 为原点，以 $\left\{\frac{1}{3}\overrightarrow{DA},\ \frac{1}{4}\overrightarrow{DC},\ \frac{1}{2}\overrightarrow{DD_1}\right\}$ 为空间的一个单位正交基底，建立空间直角坐标系 $Oxyz$，求平面 ACD_1 的一个法向量.

2. 空间中直线、平面的平行

我们知道，直线的方向向量和平面的法向量是确定空间中的直线和平面的关键量. 那么是否能用这些向量来刻画空间直线、平面的平行、垂直关系呢？首先来看平行的问题.

思考

由直线与直线、直线与平面或平面与平面的平行关系，可以得到直线的方向向量、平面的法向量间的什么关系？

如图 1.4-8，设 $\boldsymbol{u}_1$，$\boldsymbol{u}_2$ 分别是直线 l_1，l_2 的方向向量. 由方向向量的定义可知，如果两条直线平行，那么它们的方向向量一定平行；反过来，如果两条直线的方向向量平行，那么这两条直线也平行. 所以

$$l_1/\!/l_2\Leftrightarrow\boldsymbol{u}_1/\!/\boldsymbol{u}_2\Leftrightarrow\exists\lambda\in\mathbf{R}\text{，使得 }\boldsymbol{u}_1=\lambda\boldsymbol{u}_2.$$

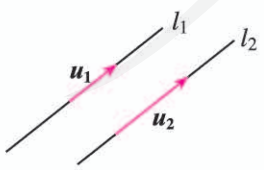


图 1.4-8

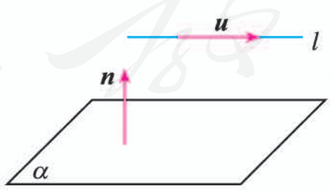


图 1.4-9

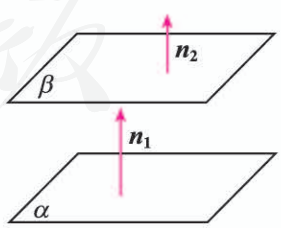


图 1.4-10

类似地，如图 1.4-9，设 $\boldsymbol{u}$ 是直线 l 的方向向量，$\boldsymbol{n}$ 是平面 α 的法向量，$l\not\subset\alpha$ 则

$$l/\!/\alpha\Leftrightarrow\boldsymbol{u}\perp\boldsymbol{n}\Leftrightarrow\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}=0.$$

如图 1.4-10，设 $\boldsymbol{n}_1$，$\boldsymbol{n}_2$ 分别是平面 α，β 的法向量，则

$$\alpha/\!/\beta\Leftrightarrow\boldsymbol{n}_1/\!/\boldsymbol{n}_2\Leftrightarrow\exists\lambda\in\mathbf{R}\text{，使得 }\boldsymbol{n}_1=\lambda\boldsymbol{n}_2.$$

例 2 证明“平面与平面平行的判定定理”：**若一个平面内的两条相交直线与另一个平面平行，则这两个平面平行.**

已知：如图 1.4-11，$a\subset\beta$，$b\subset\beta$，$a\cap b=P$，$a/\!/\alpha$，$b/\!/\alpha$.

求证：$\alpha/\!/\beta$.

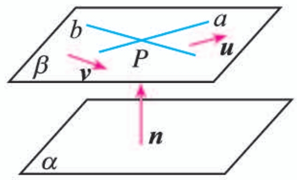


图 1.4-11

分析：设平面 α 的法向量为 $\boldsymbol{n}$，直线 a，b 的方向向量分别为 $\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$，则由已知条件可得 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{u}=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}=0$，由此可以证明 $\boldsymbol{n}$ 与平面 β 内的任意一个向量垂直，即 $\boldsymbol{n}$ 也是 β 的法向量.

证明：如图 1.4-11，取平面 α 的法向量 $\boldsymbol{n}$，直线 a，b 的方向向量 $\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$.

因为 $a/\!/\alpha$，$b/\!/\alpha$，所以 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{u}=0$，$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}=0$.

因为 $a\subset\beta$，$b\subset\beta$，$a\cap b=P$，

所以对任意点 $Q\in\beta$，存在 x，$y\in\mathbf{R}$，使得 $\overrightarrow{PQ}=x\boldsymbol{u}+y\boldsymbol{v}$.

从而 $\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PQ}=\boldsymbol{n}\cdot(x\boldsymbol{u}+y\boldsymbol{v})=x\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{u}+y\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}=0$.

所以，向量 $\boldsymbol{n}$ 也是平面 β 的法向量．故 $\alpha/\!/\beta$.

例 3 如图 1.4-12，在长方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=4$，$BC=3$，$CC_1=2$．线段 B_1C 上是否存在点 P，使得 $A_1P/\!/$平面 ACD_1？

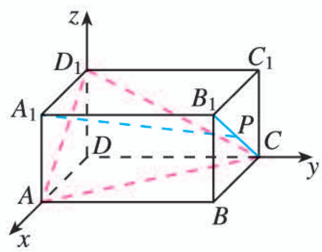


图 1.4-12

分析：根据条件建立适当的空间直角坐标系，那么问题中涉及的点、向量 $\overrightarrow{B_1C}$，$\overrightarrow{A_1P}$，以及平面 ACD_1 的法向量 $\boldsymbol{n}$ 等都可以用坐标表示．如果点 P 存在，那么就有 $\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{A_1P}=0$，由此通过向量的坐标运算可得结果.

解：以 D 为原点，DA，DC，DD_1 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴，建立如图 1.4-12 所示的空间直角坐标系．因为 A，C，D_1 的坐标分别为 $(3,0,0)$，$(0,4,0)$，$(0,0,2)$，所以

$$\overrightarrow{AC}=(-3,4,0),\ \overrightarrow{AD_1}=(-3,0,2).$$

设 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$ 是平面 ACD_1 的法向量，则 $\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0$，$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AD_1}=0$，即

$$\begin{cases}-3x+4y=0,\\-3x+2z=0.\end{cases}$$

所以
$$\begin{cases}x=\dfrac{2}{3}z,\\[2mm] y=\dfrac{1}{2}z.\end{cases}$$

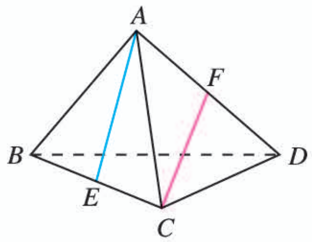
取 $z=6$，则 $x=4$，$y=3$．所以，$\boldsymbol{n}=(4,3,6)$ 是平面 ACD_1 的一个法向量.

由 A_1，C，B_1 的坐标分别为 $(3,0,2)$，$(0,4,0)$，$(3,4,2)$，得 $\overrightarrow{A_1B_1}=(0,4,0)$，$\overrightarrow{B_1C}=(-3,0,-2)$．设点 P 满足 $\overrightarrow{B_1P}=\lambda\overrightarrow{B_1C}$ $(0\leqslant\lambda\leqslant1)$，则 $\overrightarrow{B_1P}=(-3\lambda,0,-2\lambda)$，所以 $\overrightarrow{A_1P}=\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{B_1P}=(-3\lambda,4,-2\lambda)$.

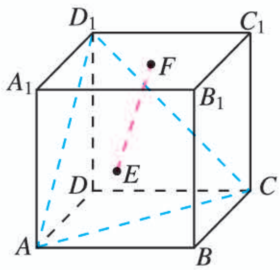
令 $\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{A_1P}=0$，得 $-12\lambda+12-12\lambda=0$，解得 $\lambda=\dfrac{1}{2}$，此时 $A_1P\not\subset$ 平面 ACD_1，这样的点 P 存在. 所以，当 $\overrightarrow{B_1P}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{B_1C}$，即 P 为 B_1C 的中点时，$A_1P//$ 平面 ACD_1.

练习

1. 用向量方法证明“直线与平面平行的判定定理”：**若平面外一条直线与此平面内的一条直线平行，则该直线与此平面平行.**
2. 如图，在四面体 $ABCD$ 中，E 是 BC 的中点. 直线 AD 上是否存在点 F，使得 $AE//CF$？



（第 2 题）



（第 3 题）

3. 如图，在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，E，F 分别是面 AB_1，面 A_1C_1 的中心. 求证：$EF//$ 平面 ACD_1.

3. 空间中直线、平面的垂直

思考

类似空间中直线、平面平行的向量表示，在直线与直线、直线与平面、平面与平面的垂直关系中，直线的方向向量、平面的法向量之间有什么关系？

一般地，直线与直线垂直，就是两直线的方向向量垂直；直线与平面垂直，就是直线的方向向量与平面的法向量平行；平面与平面垂直，就是两平面的法向量垂直.

如图 1.4-13(1)，设直线 l_1，l_2 的方向向量分别为 $\boldsymbol{u}_1$，$\boldsymbol{u}_2$，则

$$l_1\perp l_2\Leftrightarrow \boldsymbol{u}_1\perp\boldsymbol{u}_2\Leftrightarrow \boldsymbol{u}_1\cdot\boldsymbol{u}_2=0.$$

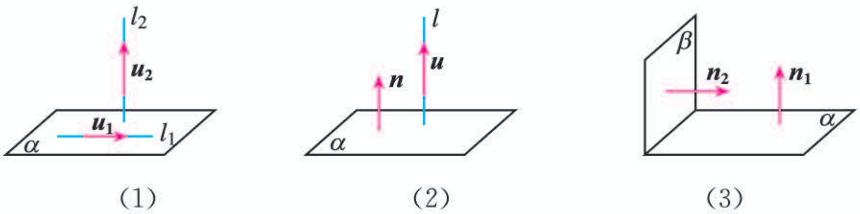


图 1.4-13

如图 1.4-13(2)，设直线 l 的方向向量为 $\boldsymbol{u}$，平面 α 的法向量为 $\boldsymbol{n}$，则

$$l \perp \alpha \Leftrightarrow \boldsymbol{u} // \boldsymbol{n} \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbf{R}，使得\ \boldsymbol{u}=\lambda \boldsymbol{n}.$$

如图 1.4-13（3），设平面 α，β 的法向量分别为 $\boldsymbol{n}_1$，$\boldsymbol{n}_2$，则

$$\alpha \perp \beta \Leftrightarrow \boldsymbol{n}_1 \perp \boldsymbol{n}_2 \Leftrightarrow \boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{n}_2=0.$$

> ？
>
> 我们随时随地看到向量运算的作用，你同意“向量是躯体，运算是灵魂”“没有运算的向量只能起路标的作用”的说法吗？

例 4 如图 1.4-14，在平行六面体 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=AD=AA_1=1$，$\angle A_1AB=\angle A_1AD=\angle BAD=60°$，求证：直线 $A_1C \perp$ 平面 BDD_1B_1.

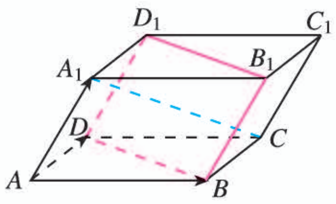


图 1.4-14

分析： 根据条件，可以 $\{\overrightarrow{AB}，\overrightarrow{AD}，\overrightarrow{AA_1}\}$ 为基底，并用基向量表示 $\overrightarrow{A_1C}$ 和平面 BDD_1B_1，再通过向量运算证明 $\overrightarrow{A_1C}$ 是平面 BDD_1B_1 的法向量即可.

证明： 设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AA_1}=\boldsymbol{c}$，则 $\{\boldsymbol{a}，\boldsymbol{b}，\boldsymbol{c}\}$ 为空间的一个基底，且

$$\overrightarrow{A_1C}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}，\overrightarrow{BD}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}，\overrightarrow{BB_1}=\boldsymbol{c}.$$

因为 $AB=AD=AA_1=1$，$\angle A_1AB=\angle A_1AD=\angle BAD=60°$，所以

$$\boldsymbol{a}^2=\boldsymbol{b}^2=\boldsymbol{c}^2=1，\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}=\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}=\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{a}=\frac{1}{2}.$$

在平面 BDD_1B_1 上，取 $\overrightarrow{BD}$，$\overrightarrow{BB_1}$ 为基向量，则对于平面 BDD_1B_1 上任意一点 P，存在唯一的有序实数对 $(\lambda，\mu)$，使得

$$\overrightarrow{BP}=\lambda\overrightarrow{BD}+\mu\overrightarrow{BB_1}.$$

所以，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{A_1C} \cdot \overrightarrow{BP} &=\lambda \overrightarrow{A_1C} \cdot \overrightarrow{BD}+\mu \overrightarrow{A_1C} \cdot \overrightarrow{BB_1} \\ &=\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}) \cdot (\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})+\mu(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}) \cdot \boldsymbol{c}=0.\end{aligned}$$

所以 $\overrightarrow{A_1C}$ 是平面 BDD_1B_1 的法向量.

所以 $A_1C \perp$ 平面 BDD_1B_1.

例 5 证明“平面与平面垂直的判定定理”：**若一个平面过另一个平面的垂线，则这两个平面垂直.**

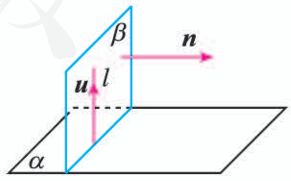


图 1.4-15

已知：如图 1.4-15，$l \perp \alpha$，$l \subset \beta$，

求证：$\alpha \perp \beta$.

证明： 取直线 l 的方向向量 $\boldsymbol{u}$，平面 β 的法向量 $\boldsymbol{n}$.

因为 $l \perp \alpha$，所以 $\boldsymbol{u}$ 是平面 α 的法向量.

因为 $l \subset \beta$，而 $\boldsymbol{n}$ 是平面 β 的法向量，所以 $\boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{n}$.

所以 $\alpha \perp \beta$.

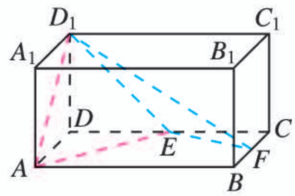
练习

1. 已知 $\boldsymbol{u}=(3, a+b, a-b)(a, b\in\mathbf{R})$ 是直线 l 的方向向量，$\boldsymbol{n}=(1, 2, 3)$ 是平面 α 的法向量.

   (1) 若 $l/\!/\alpha$，求 a，b 的关系式；(2) 若 $l\perp\alpha$，求 a，b 的值.

2. 已知正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，以 D 为原点，$\{\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DD_1}\}$ 为单位正交基底建立空间直角坐标系. 求证：$A_1C\perp BC_1$.

3. 如图，在长方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=2$，$BC=CC_1=1$，E 是 CD 的中点，F 是 BC 的中点. 求证：平面 $EAD_1\perp$ 平面 EFD_1.



（第 3 题）

1.4.2 用空间向量研究距离、夹角问题

我们知道，立体几何中的距离问题包括点到直线、点到平面、两条平行直线以及两个平行平面的距离问题等. 如何用空间向量解决这些距离问题呢？

下面我们先研究用向量方法求直线 l 外一点 P 到直线 l 的距离.

探究

已知直线 l 的单位方向向量为 $\boldsymbol{u}$，A 是直线 l 上的定点，P 是直线 l 外一点. 如何利用这些条件求点 P 到直线 l 的距离？

如图 1.4-16，向量 $\overrightarrow{AP}$ 在直线 l 上的投影向量为 $\overrightarrow{AQ}$，则 $\triangle APQ$ 是直角三角形. 因为 A，P 都是定点，所以 $|\overrightarrow{AP}|$，$\overrightarrow{AP}$ 与 $\boldsymbol{u}$ 的夹角 $\angle PAQ$ 都是确定的. 于是可求 $|\overrightarrow{AQ}|$. 再利用勾股定理，可以求出点 P 到直线 l 的距离 PQ.

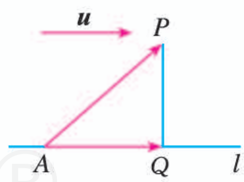


图 1.4-16

设 $\overrightarrow{AP}=\boldsymbol{a}$，则向量 $\overrightarrow{AP}$ 在直线 l 上的投影向量 $\overrightarrow{AQ}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{u})\boldsymbol{u}$. 在 Rt$\triangle APQ$ 中，由勾股定理，得

$$PQ=\sqrt{|\overrightarrow{AP}|^2-|\overrightarrow{AQ}|^2}=\sqrt{\boldsymbol{a}^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{u})^2}.$$

思考

类比点到直线的距离的求法，如何求两条平行直线之间的距离？

我们再来看平面 α 外一点 P 到平面 α 的距离问题.

如图 1.4-17，已知平面 α 的法向量为 $\boldsymbol{n}$，A 是平面 α 内的定点，P 是平面 α 外一点. 过点 P 作平面 α 的垂线 l，交平面 α 于点 Q，则 $\boldsymbol{n}$ 是直线 l 的方向向量，且点 P 到平面 α

的距离就是 $\overrightarrow{AP}$ 在直线 l 上的投影向量 $\overrightarrow{QP}$ 的长度. 因此

$$PQ=\left|\overrightarrow{AP}\cdot\frac{\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|}\right|=\left|\frac{\overrightarrow{AP}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|}\right|=\frac{|\overrightarrow{AP}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}.$$

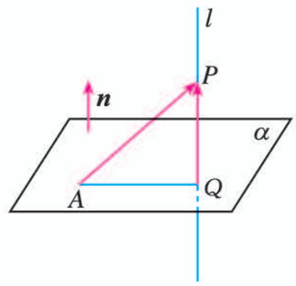


图 1.4-17

类似地，请同学们研究如何求两个平行平面的距离.

例 6 如图 1.4-18，在棱长为 1 的正方体 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 中，E 为线段 A_1B_1 的中点，F 为线段 AB 的中点.

(1) 求点 B 到直线 AC_1 的距离；

(2) 求直线 FC 到平面 AEC_1 的距离.

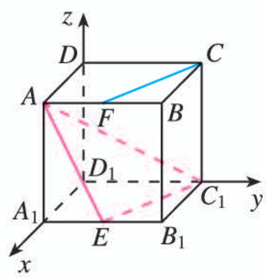


图 1.4-18

分析： 根据条件建立空间直角坐标系，用坐标表示相关的点、直线的方向向量和平面的法向量，再利用有关公式，通过坐标运算得出相应的距离.

解： 以 D_1 为原点，D_1A_1，D_1C_1，D_1D 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴，建立如图 1.4-18 所示的空间直角坐标系，则 $A(1,0,1)$，$B(1,1,1)$，$C(0,1,1)$，$C_1(0,1,0)$，$E\left(1,\frac{1}{2},0\right)$，$F\left(1,\frac{1}{2},1\right)$，所以

$$\overrightarrow{AB}=(0,1,0),\ \overrightarrow{AC_1}=(-1,1,-1),\ \overrightarrow{AE}=\left(0,\frac{1}{2},-1\right),$$

$$\overrightarrow{EC_1}=\left(-1,\frac{1}{2},0\right),\ \overrightarrow{FC}=\left(-1,\frac{1}{2},0\right),\ \overrightarrow{AF}=\left(0,\frac{1}{2},0\right).$$

(1) 取 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}=(0,1,0)$，$\boldsymbol{u}=\dfrac{\overrightarrow{AC_1}}{|\overrightarrow{AC_1}|}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}(-1,1,-1)$，则 $\boldsymbol{a}^2=1$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{u}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

所以，点 B 到直线 AC_1 的距离为

$$\sqrt{\boldsymbol{a}^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{u})^2}=\sqrt{1-\frac{1}{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}.$$

(2) 因为 $\overrightarrow{FC}=\overrightarrow{EC_1}=\left(-1,\frac{1}{2},0\right)$，所以 $FC/\!/EC_1$，所以 $FC/\!/$平面 AEC_1. 所以点 F 到平面 AEC_1 的距离即为直线 FC 到平面 AEC_1 的距离.

设平面 AEC_1 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则

$$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AE}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EC_1}=0.\end{cases}$$

所以

$$\begin{cases}\dfrac{1}{2}y-z=0,\\ -x+\dfrac{1}{2}y=0.\end{cases}$$

所以

$$\begin{cases} x=z, \\ y=2z. \end{cases}$$

取 $z=1$，则 $x=1$，$y=2$. 所以，$\boldsymbol{n}=(1, 2, 1)$ 是平面 AEC_1 的一个法向量.

又因为 $\overrightarrow{AF}=\left(0, \frac{1}{2}, 0\right)$，所以点 F 到平面 AEC_1 的距离为

$$\frac{|\overrightarrow{AF}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{\left|\left(0, \frac{1}{2}, 0\right)\cdot(1, 2, 1)\right|}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{6}.$$

即直线 FC 到平面 AEC_1 的距离为$\frac{\sqrt{6}}{6}$.

与用平面向量解决平面几何问题的“三步曲”类似，我们可以得出用空间向量解决立体几何问题的“三步曲”：

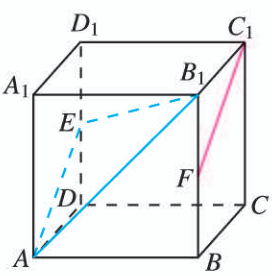
（1）建立立体图形与空间向量的联系，用空间向量表示问题中涉及的点、直线、平面，把立体几何问题转化为向量问题；

（2）通过向量运算，研究点、直线、平面之间的位置关系以及它们之间的距离和夹角等问题；

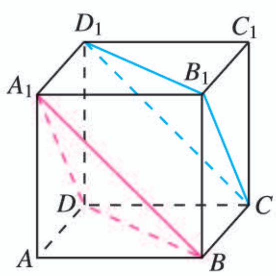
（3）把向量运算的结果“翻译”成相应的几何结论.

练习

1. 在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 A 到平面 B_1C 的距离等于________；直线 DC 到平面 AB_1 的距离等于________；平面 DA_1 到平面 CB_1 的距离等于________.
2. 如图，在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E 为线段 DD_1 的中点，F 为线段 BB_1 的中点.
   （1）求点 A_1 到直线 B_1E 的距离；
   （2）求直线 FC_1 到直线 AE 的距离；
   （3）求点 A_1 到平面 AB_1E 的距离；
   （4）求直线 FC_1 到平面 AB_1E 的距离.



（第 2 题）



（第 3 题）

3. 如图，在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，求平面 A_1DB 与平面 D_1CB_1 的距离.

与距离类似，角度是立体几何中另一个重要的度量. 下面我们用向量方法研究直线与直线所成的角、直线与平面所成的角以及平面与平面的夹角，先看下列问题.

例 7 如图 1.4-19，在棱长为 1 的正四面体（四个面都是正三角形）$ABCD$ 中，M，N 分别为 BC，AD 的中点，求直线 AM 和 CN 夹角的余弦值.

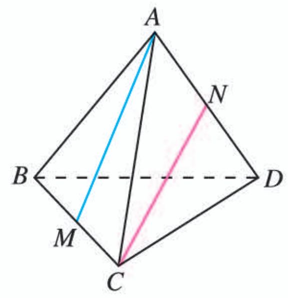


图 1.4-19

分析： 求直线 AM 和 CN 夹角的余弦值，可以转化为求向量 $\overrightarrow{MA}$ 与 $\overrightarrow{CN}$ 夹角的余弦值. 为此需要把向量 $\overrightarrow{MA}$，$\overrightarrow{CN}$ 用适当的基底表示出来，进而求得向量 $\overrightarrow{MA}$，$\overrightarrow{CN}$ 夹角的余弦值.

解：

化为向量问题

如图 1.4-19，以 $\{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD}\}$ 作为基底，则

$$\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{CA}-\frac{1}{2}\overrightarrow{CB},\quad \overrightarrow{CN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CD}).$$

设向量 $\overrightarrow{CN}$ 与 $\overrightarrow{MA}$ 的夹角为 θ，则直线 AM 和 CN 夹角的余弦值等于 $|\cos\theta|$.

进行向量运算

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CN}\cdot\overrightarrow{MA}&=\frac{1}{2}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CD})\cdot(\overrightarrow{CA}-\frac{1}{2}\overrightarrow{CB})\\&=\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}^2-\frac{1}{4}\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{CA}-\frac{1}{4}\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{CB}\\&=\frac{1}{2}-\frac{1}{8}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

又 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ACD$ 均为等边三角形，所以 $|\overrightarrow{MA}|=|\overrightarrow{CN}|=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

所以 $$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{CN}\cdot\overrightarrow{MA}}{|\overrightarrow{CN}||\overrightarrow{MA}|}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{2}{3}.$$

回到图形问题

所以直线 AM 和 CN 夹角的余弦值为 $\frac{2}{3}$.

思考

以上我们用向量方法解决了异面直线 AM 和 CN 所成角的问题，你能用向量方法求直线 AB 与平面 BCD 所成的角吗？

一般地，两条异面直线所成的角，可以转化为两条异面直线的方向向量的夹角来求

得．也就是说，若异面直线 l_1，l_2 所成的角为 θ，其方向向量分别是 $\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$，则

$$\cos\theta=|\cos\langle\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v}\rangle|=\left|\frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|}\right|=\frac{|\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}|}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|}.$$

类似地，直线与平面所成的角，可以转化为直线的方向向量与平面的法向量的夹角．如图 1.4-20，直线 AB 与平面 α 相交于点 B，设直线 AB 与平面 α 所成的角为 θ，直线 AB 的方向向量为 $\boldsymbol{u}$，平面 α 的法向量为 $\boldsymbol{n}$，则

$$\sin\theta=|\cos\langle\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{n}\rangle|=\left|\frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{n}|}\right|=\frac{|\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{n}|}.$$

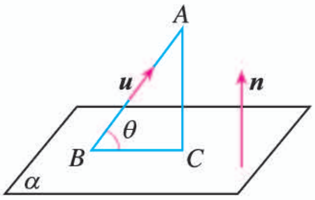


图 1.4-20

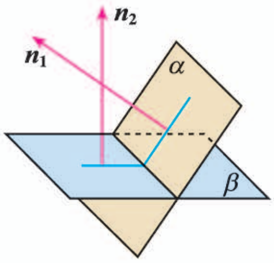


图 1.4-21

如图 1.4-21，平面 α 与平面 β 相交，形成四个二面角，我们把这四个二面角中不大于 90°的二面角称为**平面 α 与平面 β 的夹角**．

> ？
>
> 图 1.4-21 中有几个二面角？两个平面的夹角与这两个平面形成的二面角有什么关系？

类似于两条异面直线所成的角，若平面 α，β 的法向量分别是 $\boldsymbol{n}_1$ 和 $\boldsymbol{n}_2$，则平面 α 与平面 β 的夹角即向量 $\boldsymbol{n}_1$ 和 $\boldsymbol{n}_2$ 的夹角或其补角．设平面 α 与平面 β 的夹角为 θ，则

$$\cos\theta=|\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\ \boldsymbol{n}_2\rangle|=\left|\frac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}\right|=\frac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}.$$

例 8 如图 1.4-22，在直三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中，$AC=CB=2$，$AA_1=3$，$\angle ACB=90°$，P 为 BC 的中点，点 Q，R 分别在棱 AA_1，BB_1 上，$A_1Q=2AQ$，$BR=2RB_1$．求平面 PQR 与平面 $A_1B_1C_1$ 夹角的余弦值．

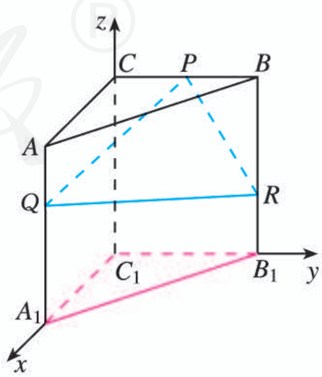


图 1.4-22

分析： 因为平面 PQR 与平面 $A_1B_1C_1$ 的夹角可以转化为平面 PQR 与平面 $A_1B_1C_1$ 的法向量的夹角，所以只需要求出这两个平面的法向量的夹角即可．

解：

化为向量问题

以 C_1 为原点，C_1A_1，C_1B_1，C_1C 所在直线为 x 轴、y 轴、z 轴，建立如图 1.4-22 所示的空间直角坐标系．设平面 $A_1B_1C_1$ 的法向量为 $\boldsymbol{n}_1$，平面 PQR 的法向量为 $\boldsymbol{n}_2$，则平面 PQR 与平面 $A_1B_1C_1$ 的夹角就是 $\boldsymbol{n}_1$ 与 $\boldsymbol{n}_2$ 的夹角或其补角．

进行向量运算

因为 $C_1C\perp$ 平面 $A_1B_1C_1$，所以平面 $A_1B_1C_1$ 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(0,\ 0,\ 1)$.

根据所建立的空间直角坐标系，可知 $P(0,\ 1,\ 3)$，$Q(2,\ 0,\ 2)$，$R(0,\ 2,\ 1)$. 所以 $\overrightarrow{PQ}=(2,\ -1,\ -1)$，$\overrightarrow{PR}=(0,\ 1,\ -2)$. 设 $\boldsymbol{n}_2=(x,\ y,\ z)$，则

$$\begin{cases}\boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{PQ}=0,\\ \boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{PR}=0,\end{cases}$$

所以
$$\begin{cases}2x-y-z=0,\\ y-2z=0.\end{cases}$$

所以
$$\begin{cases}x=\dfrac{3}{2}z,\\ y=2z.\end{cases}$$

取 $\boldsymbol{n}_2=(3,\ 4,\ 2)$，则

$$\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle=\frac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=\frac{(0,\ 0,\ 1)\cdot(3,\ 4,\ 2)}{1\times\sqrt{29}}=\frac{2\sqrt{29}}{29}.$$

回到图形问题

设平面 PQR 与平面 $A_1B_1C_1$ 的夹角为 θ，则

$$\cos\theta=|\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\ \boldsymbol{n}_2\rangle|=\frac{2\sqrt{29}}{29}.$$

即平面 PQR 与平面 $A_1B_1C_1$ 的夹角的余弦值为 $\dfrac{2\sqrt{29}}{29}$.

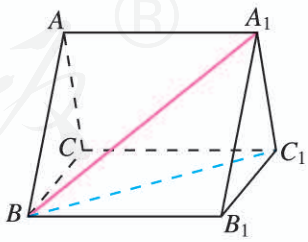
练习

1. 在直三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中，$\angle BCA=90°$，D_1，F_1 分别是 A_1B_1，A_1C_1 的中点，$BC=CA=CC_1$，则 BD_1 与 AF_1 所成角的余弦值是（　　）.

   (A) $\dfrac{\sqrt{30}}{10}$　　(B) $\dfrac{1}{2}$　　(C) $\dfrac{\sqrt{30}}{15}$　　(D) $\dfrac{\sqrt{15}}{10}$

2. PA，PB，PC 是从点 P 出发的三条射线，每两条射线的夹角均为 $60°$，那么直线 PC 与平面 PAB 所成角的余弦值是（　　）.

   (A) $\dfrac{1}{2}$　　(B) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　(C) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　(D) $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$



（第 3 题）

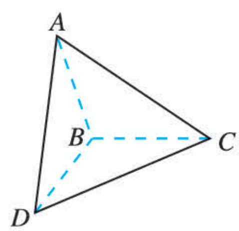
3. 如图，正三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 的所有棱长都为 2，求平面 AA_1B 与平面 A_1BC_1 夹角的余弦值.

4. 如图，$\triangle ABC$ 和 $\triangle DBC$ 所在平面垂直，且 $AB=BC=BD$，$\angle CBA=\angle DBC=120°$. 求：

   (1) 直线 AD 与直线 BC 所成角的大小；

   (2) 直线 AD 与平面 BCD 所成角的大小；

   (3) 平面 ABD 和平面 BDC 的夹角的余弦值.



（第 4 题）

例 9 图 1.4-23 为某种礼物降落伞的示意图，其中有 8 根绳子和伞面连接，每根绳子和水平面的法向量的夹角均为 30°. 已知礼物的质量为 1 kg，每根绳子的拉力大小相同. 求降落伞在匀速下落的过程中每根绳子拉力的大小（重力加速度 g 取 $9.8\ \text{m/s}^2$，精确到 0.01 N).

图 1.4-23

分析：因为降落伞匀速下落，所以降落伞 8 根绳子拉力的合力的大小等于礼物重力的大小. 8 根绳子的拉力在水平面的法向量方向上的投影向量的和向量与礼物的重力是一对相反向量.

解：如图 1.4-24，设水平面的单位法向量为 $\boldsymbol{n}$，其中一根绳子的拉力为 $\boldsymbol{F}$. 因为 $\langle \boldsymbol{n}, \boldsymbol{F}\rangle=30°$，所以 $\boldsymbol{F}$ 在 $\boldsymbol{n}$ 上的投影向量为 $\left|\dfrac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{F}\right|\boldsymbol{n}$. 所以 8 根绳子拉力的合力

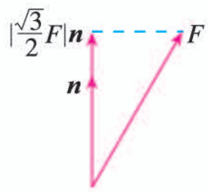


图 1.4-24

$$\boldsymbol{F}_{合}=8\times\left|\frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{F}\right|\boldsymbol{n}=4\sqrt{3}\,|\boldsymbol{F}|\,\boldsymbol{n}.$$

又因为降落伞匀速下落，所以

$$|\boldsymbol{F}_{合}|=|\boldsymbol{G}_{礼物}|=1\times 9.8=9.8\ (\text{N}).$$

所以

$$\left|4\sqrt{3}\,|\boldsymbol{F}|\,\boldsymbol{n}\right|=9.8.$$

所以

$$|\boldsymbol{F}|=\frac{9.8}{4\sqrt{3}}\approx 1.41\ (\text{N}).$$

例 10 如图 1.4-25，在四棱锥 P-$ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是正方形，侧棱 $PD\perp$ 底面 $ABCD$，$PD=DC$，E 是 PC 的中点，作 $EF\perp PB$ 交 PB 于点 F.

(1) 求证：$PA/\!/$平面 EDB；

(2) 求证：$PB\perp$平面 EFD；

(3) 求平面 CPB 与平面 PBD 的夹角的大小.

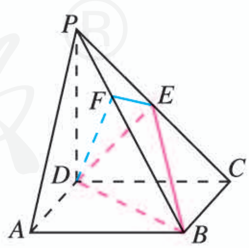


图 1.4-25

分析：本题涉及的问题包括：直线与平面平行和垂直的判定，计算两个平面的夹角. 这些问题都可以利用向量方法解决. 由于四棱锥的底面是正方形，而且一条侧棱垂直于底面，可以利用这些条件建立适当的空间直角坐标系，用向量及坐标表示问题中的几何元素，进而解决问题.

解：以 D 为原点，DA，DC，DP 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴，建立如图 1.4-26 所示的空间直角坐标系，设 $DC=1$.

(1) **证明**：连接 AC，交 BD 于点 G，连接 EG.

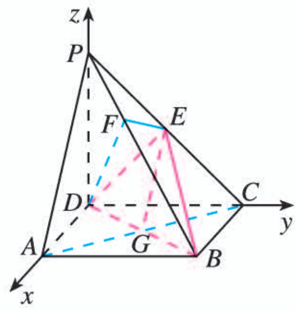


图 1.4-26

依题意得 $A(1, 0, 0)$，$P(0, 0, 1)$，$E\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

因为底面 $ABCD$ 是正方形，所以点 G 是它的中心，故点 G 的坐标为$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$，且 $\overrightarrow{PA}=(1, 0, -1)$，$\overrightarrow{EG}=\left(\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}\right)$.

所以 $\overrightarrow{PA}=2\overrightarrow{EG}$，即 $PA /\!/ EG$.

而 $EG \subset$ 平面 EDB，且 $PA \not\subset$ 平面 EDB，因此 $PA /\!/$ 平面 EDB.

(2) **证明**：依题意得

$$B(1, 1, 0), \overrightarrow{PB}=(1, 1, -1).$$

又 $\overrightarrow{DE}=\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$，故

$$\overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{DE}=0+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0.$$

所以 $PB \perp DE$.

由已知 $EF \perp PB$，且 $EF \cap DE=E$，
所以 $PB \perp$ 平面 EFD.

(3) **解**：已知 $PB \perp EF$，由 (2) 可知 $PB \perp DF$，故 $\angle EFD$ 是平面 CPB 与平面 PBD 的夹角.

由 (2) 可知点 F 的坐标为 (x, y, z)，则 $\overrightarrow{PF}=(x, y, z-1)$.

因为 $\overrightarrow{PF}=k\overrightarrow{PB}$，所以

$(x, y, z-1)=k(1, 1, -1)=(k, k, -k)$，即 $x=k$，$y=k$，$z=1-k$.

设 $\overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{DF}=0$，则

$$(1, 1, -1) \cdot (k, k, 1-k)=k+k-1+k=3k-1=0.$$

所以 $k=\frac{1}{3}$，点 F 的坐标为$\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

又点 E 的坐标为$\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$，所以

$$\overrightarrow{FE}=\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{6}\right).$$

所以 $\cos\angle EFD=\dfrac{\overrightarrow{FE} \cdot \overrightarrow{FD}}{|\overrightarrow{FE}||\overrightarrow{FD}|}=\dfrac{\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{6}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)}{\frac{\sqrt{6}}{6} \times \frac{\sqrt{6}}{3}}=\frac{1}{2}$.

所以 $\angle EFD=60^\circ$，即平面 CPB 与平面 PBD 的夹角大小为 60°.

通过本节的学习，你对立体几何中的向量法是否有了一定的认识？请结合例题就下面的框图谈谈体会.

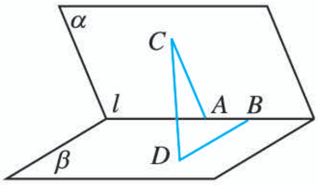
用空间向量表示立体图形中点、直线、平面等元素 → 进行空间向量的运算，研究点、直线、平面之间的关系 → 把运算结果“翻译”成相应的几何意义

解决立体几何中的问题，可用三种方法：综合法、向量法、坐标法. 你能说出它们各自的特点吗？

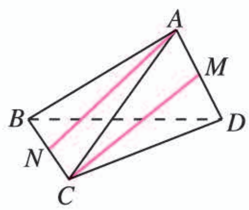
综合法以逻辑推理作为工具解决问题；向量法利用向量的概念及其运算解决问题，如本节的例 7、例 9；坐标法利用数及其运算来解决问题，坐标法经常与向量法结合起来使用，如本节的例 6，例 8，例 10. 对于具体的问题，应根据它的条件和所求选择合适的方法.

练习

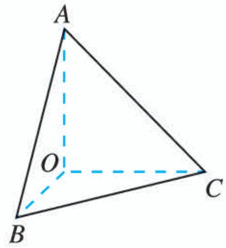
1. 如图，二面角 α-l-β 的棱上有两个点 A，B，线段 BD 与 AC 分别在这个二面角的两个面内，并且都垂直于棱 l. 若 $AB=4$，$AC=6$，$BD=8$，$CD=2\sqrt{17}$，求平面 α 与平面 β 的夹角.



（第 1 题）



（第 2 题）



（第 3 题）

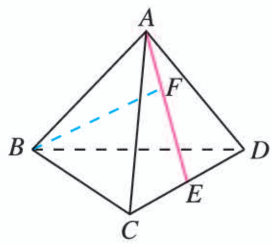
2. 如图，在三棱锥 A-BCD 中，$AB=AC=BD=CD=3$，$AD=BC=2$，M，N 分别是 AD，BC 的中点. 求异面直线 AN，CM 所成角的余弦值.
3. 如图，在三棱锥 O-ABC 中，OA，OB，OC 两两垂直，$OA=OC=3$，$OB=2$. 求直线 OB 与平面 ABC 所成角的正弦值.

习题 1.4

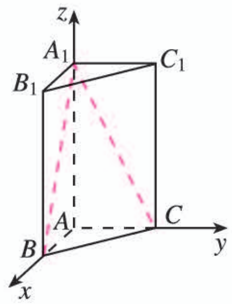
复习巩固

1. 如图，在三棱锥 A-BCD 中，E 是 CD 的中点，点 F 在 AE 上，且 $EF=2FA$. 设 $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{BD}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{BA}=\boldsymbol{c}$，求直线 AE，BF 的方向向量.
2. 如图，在直三棱柱 ABC-$A_1B_1C_1$ 中，$AB\perp AC$，$AB=AC=1$，$AA_1=2$. 以 A 为原点，建立如图所示空间直角坐标系.

（1）求平面 BCC_1B_1 的法向量；（2）求平面 A_1BC 的法向量.

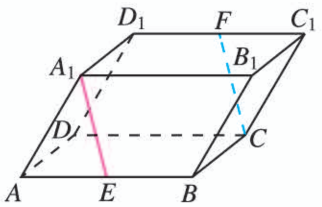


（第 1 题）

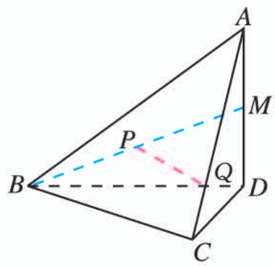


（第 2 题）

3. 如图，在平行六面体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，E 是 AB 的中点，F 是 C_1D_1 的中点. 求证：$A_1E/\!/CF$.



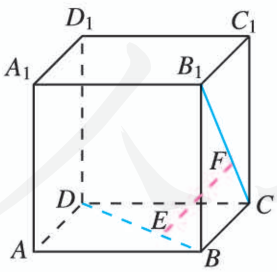
（第 3 题）



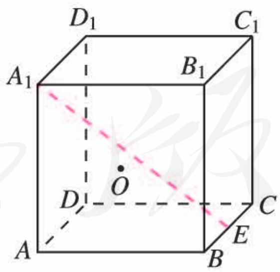
（第 4 题）

4. 如图，在四面体 $ABCD$ 中，$AD\perp$平面 BCD，M 是 AD 的中点，P 是 BM 的中点. 点 Q 在线段 AC 上，且 $AQ=3QC$. 求证：$PQ/\!/$平面 BCD.

5. 如图，在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，点 E 在 BD 上，且 $BE=\dfrac{1}{3}BD$；点 F 在 CB_1 上，且 $CF=\dfrac{1}{3}CB_1$. 求证：（1）$EF\perp BD$；（2）$EF\perp CB_1$.



（第 5 题）



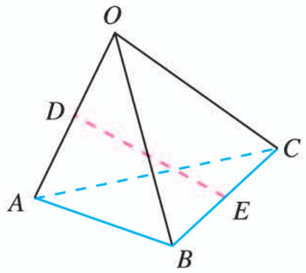
（第 6 题）

6. 如图，在棱长为 1 的正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，O 为平面 A_1ABB_1 的中心，E 为 BC 的中点，求点 O 到直线 A_1E 的距离.

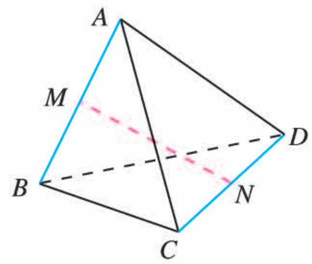
7. 如图，四面体 $OABC$ 的所有棱长都是 1，D，E 分别是 OA，BC 的中点，连接 DE.

（1）计算 DE 的长；

（2）求点 O 到平面 ABC 的距离.



（第 7 题）

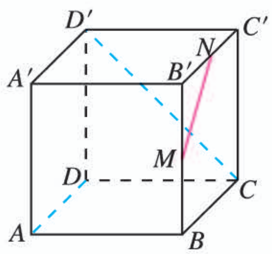


（第 8 题）

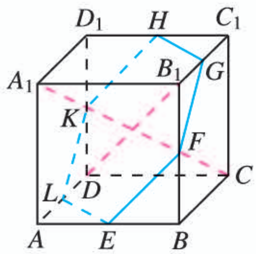
8. 如图，四面体 $ABCD$ 的每条棱长都等于 a，M，N 分别是 AB，CD 的中点. 求证：$MN\perp AB$，$MN\perp CD$.

9. 如图，M，N 分别是正方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$ 的棱 BB' 和 $B'C'$ 的中点，求：

（1）MN 和 CD' 所成角的大小；（2）MN 和 AD 所成角的大小.



（第 9 题）



（第 10 题）

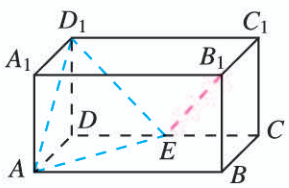
10. 如图，在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，E，F，G，H，K，L 分别是 AB，BB_1，B_1C_1，C_1D_1，D_1D，DA 各棱的中点.

（1）求证：$A_1C\perp$ 平面 $EFGHKL$；

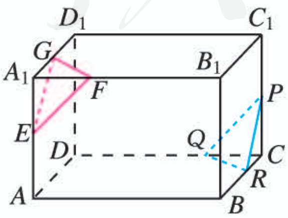
（2）求 DB_1 与平面 $EFGHKL$ 所成角的余弦值.

综合运用

11. 如图，在长方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=2$，$BC=CC_1=1$，E 是 CD 的中点. 求证：$B_1E\perp$ 平面 AED_1.



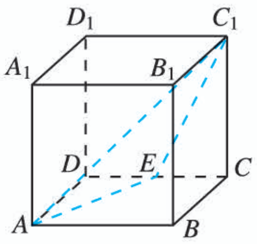
（第 11 题）



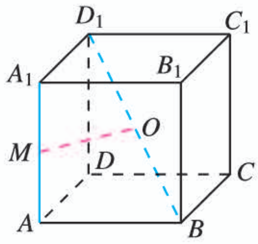
（第 12 题）

12. 如图，在长方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，点 E，F，G 分别在棱 A_1A，A_1B_1，A_1D_1 上，$A_1E=A_1F=A_1G=1$；点 P，Q，R 分别在棱 CC_1，CD，CB 上，$CP=CQ=CR=1$. 求证：平面 EFG//平面 PQR.

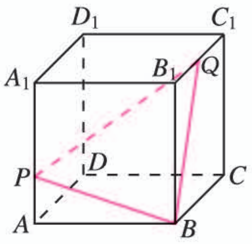
13. 如图，已知正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，E 为 CD 的中点，求点 D_1 到平面 AEC_1 的距离.



（第 13 题）



（第 14 题）



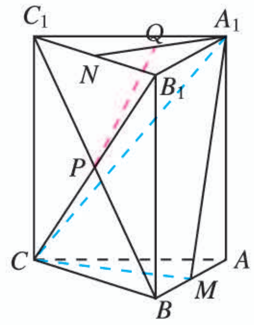
（第 15 题）

14. 如图，正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，M 是棱 AA_1 的中点，O 是 BD_1 的中点. 求证：OM 分别与异面直线 AA_1，BD_1 垂直，并求 OM 的长.

15. 如图，已知正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，Q 为 B_1C_1 的中点，点 P 在棱 AA_1 上，$AP:AA_1=1:3$. 求平面 $ABCD$ 与平面 BQP 夹角的余弦值.

拓广探索

16. 如图，在直三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中，$\angle BAC=90°$，$AB=AC=2$，$AA_1=3$. M 是 AB 的中点，N 是 B_1C_1 的中点，P 是 BC_1 与 B_1C 的交点. 在线段 A_1N 上是否存在点 Q，使得 PQ//平面 A_1CM？



（第 16 题）

17. 在空间直角坐标系中，已知向量 $\boldsymbol{u}=(a, b, c)(abc\neq 0)$，点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$，点 $P(x, y, z)$.

(1) 若直线 l 经过点 P_0，且以 $\boldsymbol{u}$ 为方向向量，P 是直线 l 上的任意一点，求证：$\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}$；

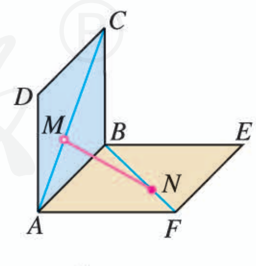
(2) 若平面 α 经过点 P_0，且以 $\boldsymbol{u}$ 为法向量，P 是平面 α 内的任意一点，求证：$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$.

18. 在如图所示的试验装置中，两个正方形框架 $ABCD$，$ABEF$ 的边长都是 1，且它们所在的平面互相垂直. 活动弹子 M，N 分别在正方形对角线 AC 和 BF 上移动，且 CM 和 BN 的长度保持相等，记 $CM=BN=a$ $(0<a<\sqrt{2})$.

(1) 求 MN 的长；

(2) a 为何值时，MN 的长最小？

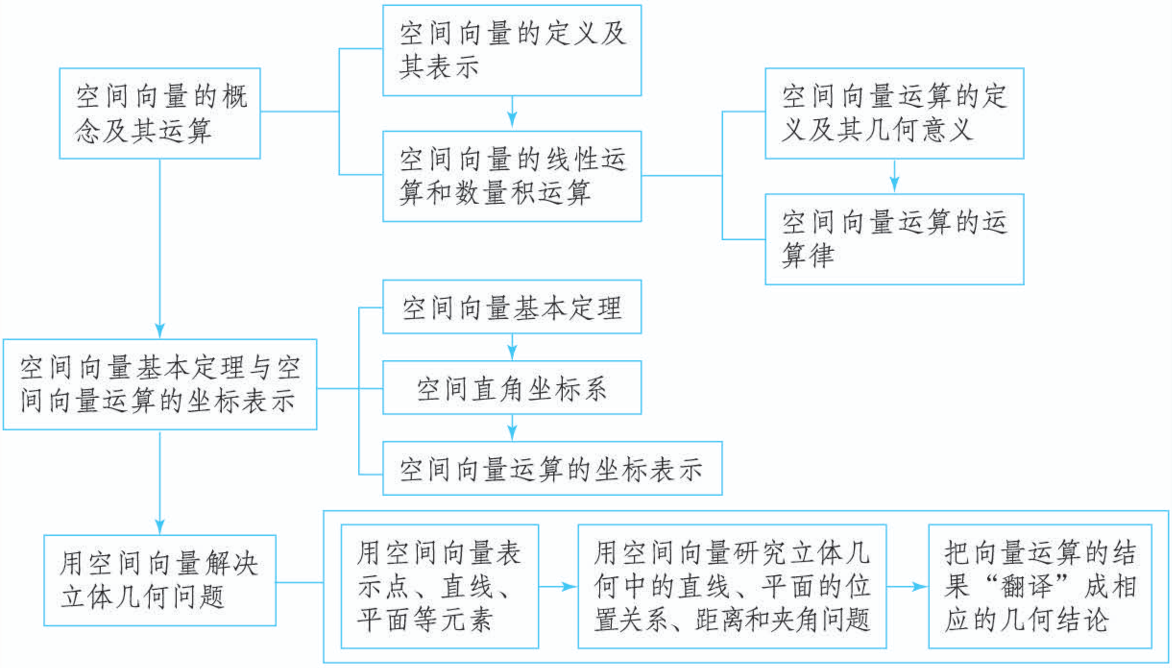
(3) 当 MN 的长最小时，求平面 MNA 与平面 MNB 夹角的余弦值.



（第 18 题）

小结

一、本章知识结构



二、回顾与思考

空间向量是研究空间图形的有力工具．本章我们在必修课程学习平面向量的基础上，利用类比方法，学习空间向量的概念、运算（包括线性运算和数量积）、基本定理，并运用空间向量研究空间基本图形的平行、垂直等位置关系和距离、角度等度量问题．

向量是具有大小和方向的量，这一概念既适用于平面，也适用于空间．平面内的向量都可以看作空间中的向量，因此空间向量的概念、表示和平面向量是一致的．由于任意两个空间向量都可以平移到一个平面内，因此两个空间向量的运算可以看作两个平面向量的运算，它们的加法、数乘、数量积运算也是一致的．

空间向量为我们解决立体几何问题提供了新的工具．向量让几何量带上了方向，并用统一的符号表示，因此向量运算既是几何的运算也是数的运算．用空间向量解决立体几何问题，首先要用空间向量表示立体几何问题中涉及的几何元素，将几何问题转化为向量问题；然后通过空间向量的运算，研究空间图形之间的平行、垂直等位置关系以及距离、夹角等度量问题；最后将运算结果“翻译”成相应的几何结论，得到相应立体几何问题的解决．这个“三步曲”，是立体几何中向量方法的具体化．

空间向量的加法、数乘、数量积等运算以及空间向量基本定理是用“向量法”解决立体几何问题的基础．空间向量基本定理把空间任意一个向量表示成三个不共面向量的线性运算，在用空间向量解决立体几何问题的过程中，这种表示发挥了基础性的作用．由空间向量基本定理，我们还可以进一步得到空间向量及其运算的坐标表示，从而将几何问题完全“代数化”，得到用空间向量解决立体几何问题的“坐标法”．

请你带着下面的问题，复习一下全章内容吧！

1．空间向量由平面向量推广而来，空间向量与平面向量有许多共同性质．如果我们把平面看成二维空间，把普通的空间看成三维空间，我们能不能把向量的概念推广到四维（例如由“长”“宽”“高”“时间”四个维度构成的空间）、五维等“空间”中去呢？它们是否也与平面向量、空间向量有许多共同的性质？

2．因为向量可以用有向线段表示，所以我们用几何方式引入空间向量的运算法则，如向量加法的平行四边形法则．在空间直角坐标系中，我们还可以把这种由几何方式引入的向量运算转化成代数运算（实数运算）．对于这样的做法给空间向量运算带来的方便，你有什么体会？

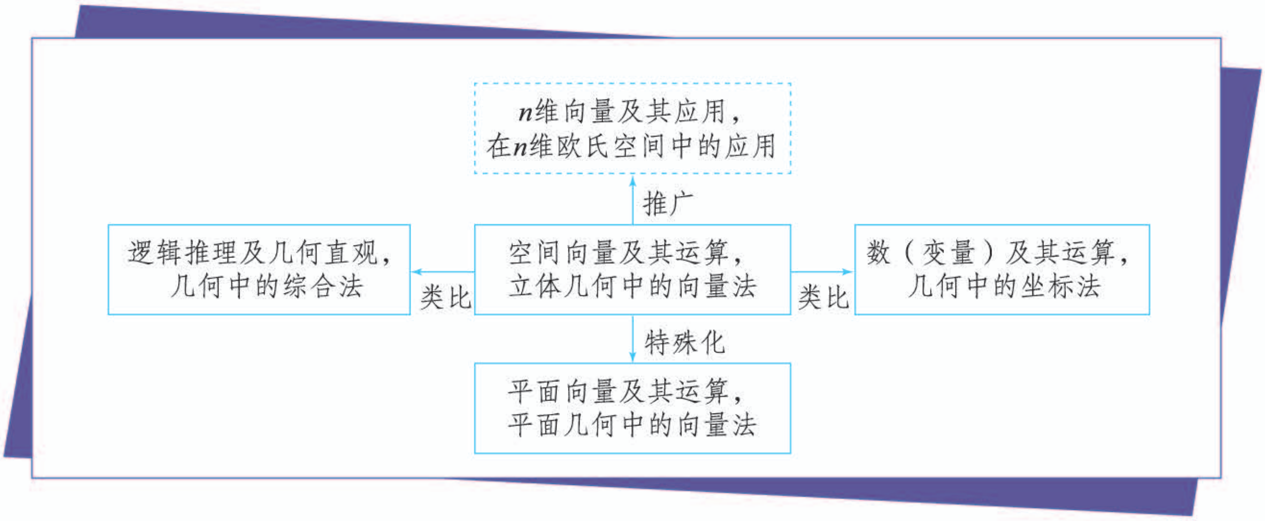
3．同学们对数及其运算比较熟悉，向量虽然与数量不同，但是它也构成一个运算体系，我们要从“数、量与运算”发展的角度理解向量及其运算．类比数的运算律，对于向量仍然成立的有哪些？不成立的有哪些？

4．如何理解空间向量可以由三个不共面向量唯一表示？你认为应如何根据问题的条件选择空间的基底？

5．利用空间向量解决立体几何问题，首先要用空间向量表示空间中的点、直线、平面这些基本几何元素．在这一过程中，直线的方向向量和平面的法向量发挥了重要作用．我们是如何利用直线的方向向量和平面的法向量表示直线和平面的？我们又是如何利用直线的方向向量和平面的法向量刻画空间直线、平面的平行和垂直关系的？

6．距离和角度是立体几何中的基本度量．本章我们如何把点到直线、点到平面、平行直线、平行平面间的距离转化为求投影向量长度？如何把直线与平面、平面与平面所成角的问题转化为直线的方向向量或平面的法向量之间的夹角？请结合具体实例谈谈你的体会．

7．回顾本章学习过程，你对学习数学新知识、应用数学知识解决问题的思想方法有什么新认识？请结合下面的框图谈谈你的体会．

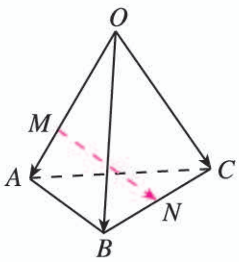


复习参考题 1

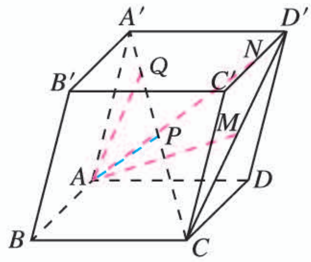
复习巩固

1. 如图，在四面体 $OABC$ 中，$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$．点 M 在 OA 上，且 $OM=2MA$，N 为 BC 中点，则 $\overrightarrow{MN}$ 等于（　　）．

(A) $\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{2}{3}\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{c}$　(B) $-\frac{2}{3}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{c}$　(C) $\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}-\frac{1}{2}\boldsymbol{c}$　(D) $\frac{2}{3}\boldsymbol{a}+\frac{2}{3}\boldsymbol{b}-\frac{1}{2}\boldsymbol{c}$



（第 1 题）

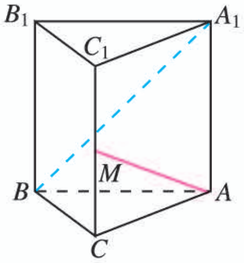


（第 2 题）

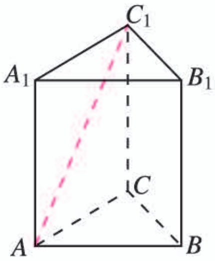
2. 如图，在平行六面体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$ 中，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AA'}=\boldsymbol{c}$．$P$，$M$，$N$ 分别是 CA'，CD'，$C'D'$ 的中点，点 Q 在 CA' 上，且 $CQ:QA'=4:1$．用空间的一个基底 $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$ 表示下列向量：

(1) $\overrightarrow{AP}$；　(2) $\overrightarrow{AM}$；　(3) $\overrightarrow{AN}$；　(4) $\overrightarrow{AQ}$.

3. 如图，在直三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中，$\angle ABC=90°$，$CB=1$，$CA=2$，$AA_1=\sqrt{6}$，M 是 CC_1 的中点．求证：$AM\perp BA_1$.



（第 3 题）



（第 4 题）

4. 如图，正三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 的底面边长为 a，侧棱长为$\sqrt{2}a$.

(1) 试建立适当的空间直角坐标系，并写出点 A，B，A_1，C_1 的坐标；

(2) 求 AC_1 与侧面 ABB_1A_1 所成的角.

5. 已知空间三点 $A(0, 2, 3)$，$B(-2, 1, 6)$，$C(1, -1, 5)$.

(1) 求以 AB，AC 为邻边的平行四边形的面积；

(2) 若向量 $\boldsymbol{a}$ 分别与 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ 垂直，且 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{3}$，求向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标.

6. 设空间两个单位向量 $\overrightarrow{OA}=(m, n, 0)$，$\overrightarrow{OB}=(0, n, p)$ 与向量 $\overrightarrow{OC}=(1, 1, 1)$ 的夹角都等于$\dfrac{\pi}{4}$，求 $\cos\angle AOB$ 的值.

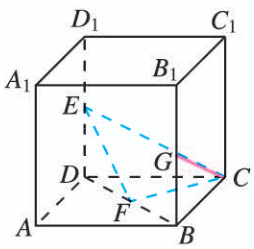
7. 正三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 的侧棱长为 2，底面边长为 1，M 是 BC 的中点. 在直线 CC_1 上求一点 N，使 $MN\perp AB_1$.

8. 如图，在棱长为 1 的正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，E，F，G 分别是 DD_1，BD，BB_1 的中点.

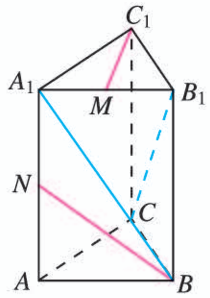
(1) 求证：$EF\perp CF$；

(2) 求 EF 与 CG 所成角的余弦值；

(3) 求 CE 的长.



（第 8 题）



（第 9 题）

9. 如图，在直三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中，$CA=CB=1$，$\angle BCA=90^\circ$，$AA_1=2$，M，N 分别是 A_1B_1，A_1A 的中点.

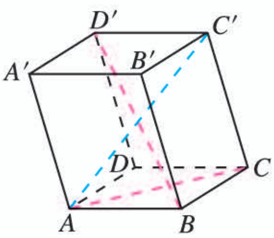
(1) 求 BN 的长；

(2) 求 $\cos\langle\overrightarrow{BA_1}, \overrightarrow{CB_1}\rangle$的值；

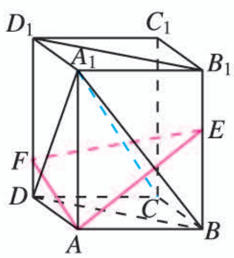
(3) 求证：$A_1B\perp C_1M$.

综合运用

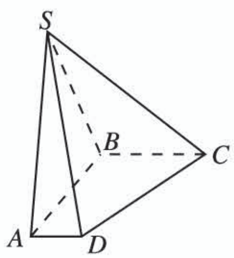
10. 如图，在平行六面体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$中，底面 $ABCD$ 是边长为 a 的正方形，侧棱 AA'的长为 b，且$\angle A'AB=\angle A'AD=120^\circ$. 求：(1) AC'的长；(2) 直线 BD'与 AC 所成角的余弦值.



（第 10 题）



（第 11 题）



（第 12 题）

11. 如图，在长方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，点 E，F 分别在 BB_1，DD_1 上，且 $AE\perp A_1B$，$AF\perp A_1D$.

(1) 求证：$A_1C\perp$平面 AEF；

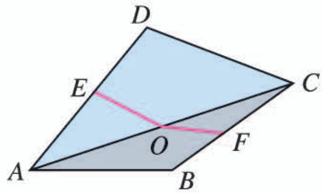
(2) 当 $AB=4$，$AD=3$，$AA_1=5$ 时，求平面 AEF 与平面 D_1B_1BD 的夹角的余弦值.

12. 如图，在四棱锥 $S\text{-}ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 满足 $AB\perp AD$，$AB\perp BC$，$SA\perp$底面 $ABCD$，且 $SA=AB=BC=1$，$AD=0.5$.

(1) 求四棱锥 $S\text{-}ABCD$ 的体积；

(2) 求平面 SCD 与平面 SAB 的夹角的余弦值.

13. 如图，把正方形纸片 $ABCD$ 沿对角线 AC 折成直二面角，E，F 分别为 AD，BC 的中点，O 是原正方形 $ABCD$ 的中心，求折纸后$\angle EOF$ 的大小.



（第 13 题）

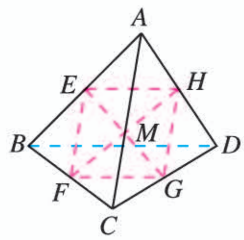
14. 在正四棱锥 $S\text{-}ABCD$ 中，O 为顶点 S 在底面内的射影，P 为侧棱 SD 的中点，且 $SO=OD$. 求直线 BC 与平面 PAC 所成的角.

15. 如图，在四面体 $ABCD$ 中，E，F，G，H 分别是 AB，BC，CD，DA 的中点.

(1) 求证：E，F，G，H 四点共面；

(2) 求证：BD//平面 $EFGH$；

(3) 设 M 是 EG 和 FH 的交点，求证：对空间任意一点 O，有 $\overrightarrow{OM}=\dfrac{1}{4}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})$.



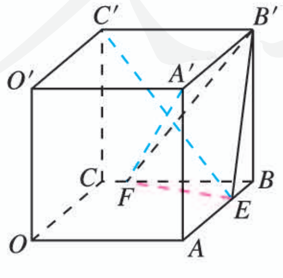
（第 15 题）

拓广探索

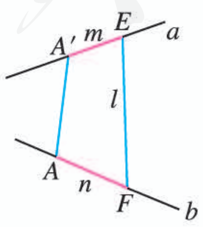
16. 如图，在棱长为 a 的正方体 $OABC\text{-}O'A'B'C'$ 中，E，F 分别是棱 AB，BC 上的动点，且 $AE=BF$.

(1) 求证：$A'F\perp C'E$；

(2) 当三棱锥 $B'\text{-}BEF$ 的体积取得最大值时，求平面 $B'EF$ 与平面 BEF 的夹角正切值.



（第 16 题）



（第 17 题）

17. 如图，两条异面直线 a，b 所成的角为 θ，在直线 a，b 上分别取点 A'，E 和点 A，F，使 $AA'\perp a$，且 $AA'\perp b$. 已知 $A'E=m$，$AF=n$，$EF=l$，求线段 AA'的长.

第二章
直线和圆的方程

在以往的几何学习中，我们常常通过直观感知、操作确认、思辨论证、度量计算等方法研究几何图形的形状、大小和位置关系，这种方法通常称为综合法．本章我们采用坐标法研究几何图形的性质．坐标法是解析几何中最基本的研究方法．

解析几何是17世纪法国数学家笛卡儿和费马创立的，它的基本内涵和方法是：通过坐标系，把几何的基本元素——点和代数的基本对象——数（有序数对或数组）对应起来，在此基础上建立曲线（点的轨迹）的方程，从而把几何问题转化为代数问题，再通过代数方法研究几何图形的性质．解析几何的创立是数学发展史上的一个里程碑，数学从此进入变量数学时期，它为微积分的创建奠定了基础．

本章我们将在平面直角坐标系中，探索确定直线位置的几何要素，建立直线的方程，并通过直线的方程研究两条直线的位置关系、交点坐标以及点到直线的距离等．类似地，通过确定圆的几何要素，建立圆的方程，再通过圆的方程研究与圆相关的问题；最后应用直线和圆的方程解决一些实际问题．

2.1 直线的倾斜角与斜率

我们知道，点是构成直线的基本元素. 在平面直角坐标系中，可以用坐标表示点，那么，如何用坐标表示直线呢？为了用代数方法研究直线的有关问题，本节我们首先在平面直角坐标系中探索确定直线位置的几何要素，然后用代数方法把这些几何要素表示出来.

2.1.1 倾斜角与斜率

思考

确定一条直线的几何要素是什么？对于平面直角坐标系中的一条直线 l（图 2.1-1），如何利用坐标系确定它的位置？

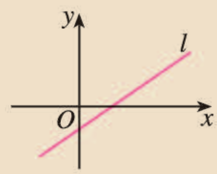


图 2.1-1

我们知道，两点确定一条直线，一点和一个方向也可以确定一条直线. 设 A，B 为直线上的两点，则 $\overrightarrow{AB}$ 就是这条直线的方向向量. 所以，两点确定一条直线可以归结为一点和一个方向确定一条直线. 在平面直角坐标系中，经过一点 P 可以作无数条直线 l_1，l_2，l_3，…，它们组成一个直线束（图 2.1-2），这些直线的区别是什么？

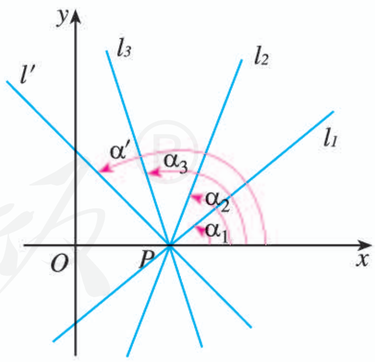


图 2.1-2

在平面直角坐标系中，我们规定水平直线的方向向右，其他直线向上的方向为这条直线的方向. 因此，这些直线的区别是它们的方向不同. 如何表示这些直线的方向？

我们看到，这些直线相对于 x 轴的倾斜程度不同，也就是它们与 x 轴所成的角不同. 因此，我们可以利用这样的角来表示这些直线的方向.

当直线 l 与 x 轴相交时，我们以 x 轴为基准，x 轴正向与直线 l 向上的方向之间所成的角 α 叫做直线 l 的**倾斜角**（angle of inclination）. 图 2.1-2 中直线 l_1 的倾斜角 α_1 为锐角，直线 l' 的倾斜角 α' 为钝角. 当直线 l 与 x 轴平行或重合时，我们规定它的倾斜角为 $0°$. 因此，直线的倾斜角 α 的取值范围为

$$0° \leqslant \alpha < 180°.$$

这样，在平面直角坐标系中，每一条直线都有一个确定的倾斜角，而且方向相同的直线，其倾斜程度相同，倾斜角相等；方向不同的直线，其倾斜程度不同，倾斜角不相等. 因此，我们可以用倾斜角表示平面直角坐标系中一条直线的倾斜程度，也就表示了直线的方向.

下面我们进一步研究刻画直线倾斜程度的方法.

设 $P_1(x_1, y_1)$，$P_2(x_2, y_2)$（其中 $x_1 \neq x_2$）是直线 l 上的两点. 由两点确定一条直线可知，直线 l 由点 P_1，P_2 唯一确定. 所以，可以推断，直线 l 的倾斜角一定与 P_1，P_2 两点的坐标有内在联系.

探究

在平面直角坐标系中，设直线 l 的倾斜角为 α.

（1）已知直线 l 经过 $O(0, 0)$，$P(\sqrt{3}, 1)$，α 与 O，P 的坐标有什么关系？

（2）类似地，如果直线 l 经过 $P_1(-1, 1)$，$P_2(\sqrt{2}, 0)$，α 与 P_1，P_2 的坐标又有什么关系？

（3）一般地，如果直线 l 经过两点 $P_1(x_1, y_1)$，$P_2(x_2, y_2)$，$x_1 \neq x_2$，那么 α 与 P_1，P_2 的坐标有怎样的关系？

下面我们利用向量法探究上述问题.

对于问题（1），如图 2.1-3（1），向量 $\overrightarrow{OP} = (\sqrt{3}, 1)$，且直线 OP 的倾斜角为 α. 由正切函数的定义，有

$$\tan\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

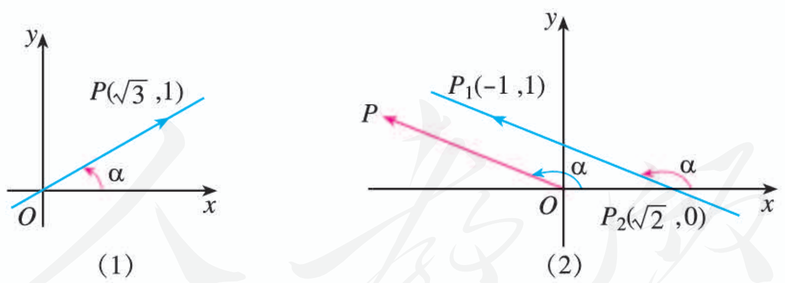


图 2.1-3

对于问题（2），如图 2.1-3（2），$\overrightarrow{P_2P_1} = (-1-\sqrt{2}, 1-0) = (-1-\sqrt{2}, 1)$. 平移向量 $\overrightarrow{P_2P_1}$ 到 $\overrightarrow{OP}$，则点 P 的坐标为 $(-1-\sqrt{2}, 1)$，且直线 OP 的倾斜角也是 α. 由正切函数的定义，有

$$\tan\alpha = \frac{1}{-1-\sqrt{2}} = 1-\sqrt{2}.$$

一般地，如图 2.1-4，当向量 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 的方向向上时，$\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2-x_1, y_2-y_1)$. 平移向量 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 到 $\overrightarrow{OP}$，则点 P 的坐标为 (x_2-x_1, y_2-y_1)，且直线 OP 的倾斜角也是 α，由正

切函数的定义，有

$$\tan\alpha=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.$$

图 2.1-4

同样，当向量$\overrightarrow{P_2P_1}$的方向向上时，如图 2.1-5，$\overrightarrow{P_2P_1}=(x_1-x_2,\ y_1-y_2)$，也有

$$\tan\alpha=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.$$

图 2.1-5

思考

当直线 P_1P_2 与 x 轴平行或重合时，上述式子还成立吗？为什么？

综上可知，直线 l 的倾斜角 α 与直线 l 上的两点 $P_1(x_1,\ y_1)$，$P_2(x_2,\ y_2)$ $(x_1\neq x_2)$ 的坐标有如下关系：

$$\tan\alpha=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}. \qquad ①$$

我们把一条直线的倾斜角 α 的正切值叫做这条直线的**斜率**（slope）．斜率常用小写字母 k 表示，即

$$\boxed{k=\tan\alpha.} \qquad ②$$

倾斜角是 90°的直线没有斜率，倾斜角不是 90°的直线都有斜率．例如，倾斜角 $\alpha=30°$时，这条直线的斜率

$$k=\tan 30°=\frac{\sqrt{3}}{3};$$

倾斜角 $\alpha=120°$时，这条直线的斜率

日常生活中常用“坡度”表示倾斜面的倾斜程度：坡度$=\dfrac{铅直高度}{水平宽度}$．当直线的倾斜角为锐角时，直线的斜率与坡度是类似的．

当直线的倾斜角由 0°逐渐增大到 180°时，其斜率如何变化？为什么？

$$k=\tan 120^\circ=-\tan 60^\circ=-\sqrt{3}.$$

由正切函数的单调性，倾斜角不同的直线，其斜率也不同. 因此，我们可以用斜率表示倾斜角不等于 90°的直线相对于 x 轴的倾斜程度，进而表示直线的方向.

如果直线经过两点 $P_1(x_1,\ y_1)$，$P_2(x_2,\ y_2)$ $(x_1\neq x_2)$，那么由①②可得如下的斜率公式：

$$\boxed{k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.}$$

我们发现，在平面直角坐标系中，倾斜角和斜率分别从形和数两个角度刻画了直线相对于 x 轴的倾斜程度.

思考

(1) 已知直线上的两点 $A(a_1,\ a_2)$，$B(b_1,\ b_2)$，运用上述公式计算直线 AB 的斜率时，与 A，B 两点的顺序有关吗？

(2) 当直线平行于 y 轴，或与 y 轴重合时，上述公式还适用吗？为什么？

我们知道，直线 P_1P_2 上的向量$\overrightarrow{P_1P_2}$ 以及与它平行的非零向量都是直线的方向向量. 直线 P_1P_2 的方向向量$\overrightarrow{P_1P_2}$ 的坐标为

$$(x_2-x_1,\ y_2-y_1).$$

当直线 P_1P_2 与 x 轴不垂直时，$x_1\neq x_2$. 此时向量$\dfrac{1}{x_2-x_1}\overrightarrow{P_1P_2}$ 也是直线 P_1P_2 的方向向量，且它的坐标为$\dfrac{1}{x_2-x_1}(x_2-x_1,\ y_2-y_1)$，即 $\left(1,\ \dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right)=(1,\ k)$，其中 k 是直线 P_1P_2 的斜率. 因此，若直线 l 的斜率为 k，它的一个方向向量的坐标为 $(x,\ y)$，则$k=\dfrac{y}{x}$.

例 1 如图 2.1-6，已知 $A(3,\ 2)$，$B(-4,\ 1)$，$C(0,\ -1)$，求直线 AB，BC，CA 的斜率，并判断这些直线的倾斜角是锐角还是钝角.

解： 直线 AB 的斜率 $k_{AB}=\dfrac{1-2}{-4-3}=\dfrac{1}{7}$；

直线 BC 的斜率 $k_{BC}=\dfrac{-1-1}{0-(-4)}=\dfrac{-2}{4}=-\dfrac{1}{2}$；

直线 CA 的斜率 $k_{CA}=\dfrac{2-(-1)}{3-0}=\dfrac{3}{3}=1$.

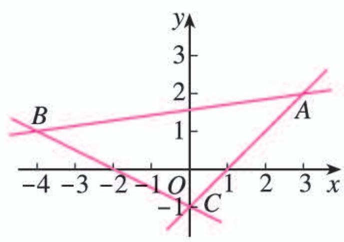


图 2.1-6

由 $k_{AB}>0$ 及 $k_{CA}>0$ 可知，直线 AB 与 CA 的倾斜角均为锐角；由 $k_{BC}<0$ 可知，直线 BC 的倾斜角为钝角.

练习

1. 已知下列直线的倾斜角，求直线的斜率：

(1) $\alpha=30°$；　(2) $\alpha=45°$；　(3) $\alpha=\frac{2\pi}{3}$；　(4) $\alpha=\frac{3\pi}{4}$.

2. 已知下列直线的斜率，求直线的倾斜角：

(1) $k=0$；　(2) $k=\sqrt{3}$；　(3) $k=-\sqrt{3}$；　(4) $k=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

3. 求经过下列两点的直线的斜率，并判断其倾斜角是锐角还是钝角：

(1) $C(18, 8)$，$D(4, -4)$；　(2) $P(0, 0)$，$Q(-1, 3)$.

4. 已知 a，b，c 是两两不等的实数，求经过下列两点的直线的倾斜角：

(1) $A(a, c)$，$B(b, c)$；

(2) $C(a, b)$，$D(a, c)$；

(3) $P(b, b+c)$，$Q(a, c+a)$.

5. 经过 $A(0, 2)$，$B(-1, 0)$ 两点的直线的方向向量为 $(1, k)$，求 k 的值.

2.1.2　两条直线平行和垂直的判定

为了在平面直角坐标系中用代数方法表示直线，我们从确定直线位置的几何要素出发，引入直线的倾斜角，再利用倾斜角与直线上点的坐标关系引入直线的斜率，从数的角度刻画了直线相对于 x 轴的倾斜程度，并导出了用直线上任意两点的坐标计算斜率的公式，从而把几何问题转化为代数问题．下面，我们通过直线的斜率判断两条直线的位置关系.

思考

我们知道，平面中两条直线有两种位置关系：相交、平行．当两条直线 l_1 与直线 l_2 平行时，它们的斜率 k_1 与 k_2 满足什么关系？

若没有特别说明，说"两条直线 l_1，l_2"时，指两条不重合的直线.

如图 2.1-7，若 $l_1 /\!/ l_2$，则 l_1 与 l_2 的倾斜角 α_1 与 α_2 相等，由 $\alpha_1=\alpha_2$，可得 $\tan\alpha_1=\tan\alpha_2$，即 $k_1=k_2$．因此，

$$若\ l_1 /\!/ l_2，则\ k_1=k_2.$$

反之，当 $k_1=k_2$ 时，$\tan\alpha_1=\tan\alpha_2$，由倾斜角的取值范围及正切函数的单调性可知，$\alpha_1=\alpha_2$，因此 $l_1 /\!/ l_2$.

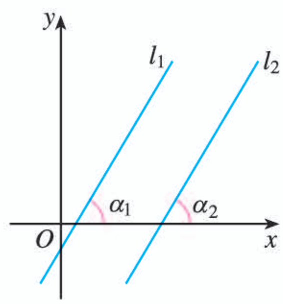


图 2.1-7

于是，对于斜率分别为 k_1，k_2 的两条直线 l_1，l_2，有

$$\boxed{l_1 /\!/ l_2 \Leftrightarrow k_1=k_2.}$$

显然，当 $\alpha_1=\alpha_2=90^\circ$时，直线的斜率不存在，此时$l_1//l_2$.

若直线 l_1，l_2 重合，此时仍然有 $k_1=k_2$. 用斜率证明三点共线时，常常用到这个结论.

例 2 已知 $A(2, 3)$，$B(-4, 0)$，$P(-3, 1)$，$Q(-1, 2)$，试判断直线 AB 与 PQ 的位置关系，并证明你的结论.

解： 如图 2.1-8，由已知可得

直线 BA 的斜率 $k_{BA}=\dfrac{3-0}{2-(-4)}=\dfrac{1}{2}$，

直线 PQ 的斜率 $k_{PQ}=\dfrac{2-1}{-1-(-3)}=\dfrac{1}{2}$.

因为 $k_{BA}=k_{PQ}$，所以直线 $AB//PQ$.

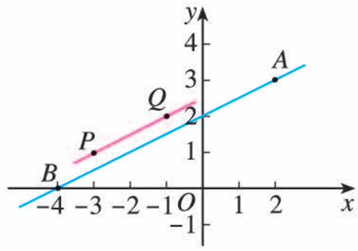


图 2.1-8

例 3 已知四边形 $ABCD$ 的四个顶点分别为 $A(0, 0)$，$B(2, -1)$，$C(4, 2)$，$D(2, 3)$，试判断四边形 $ABCD$ 的形状，并给出证明.

解： 如图 2.1-9，由已知可得

AB 边所在直线的斜率 $k_{AB}=-\dfrac{1}{2}$，

CD 边所在直线的斜率 $k_{CD}=-\dfrac{1}{2}$，

BC 边所在直线的斜率 $k_{BC}=\dfrac{3}{2}$，

DA 边所在直线的斜率 $k_{DA}=\dfrac{3}{2}$.

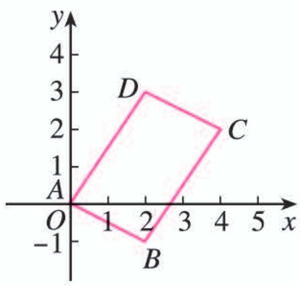


图 2.1-9

因为 $k_{AB}=k_{CD}$，$k_{BC}=k_{DA}$，所以 $AB//CD$，$BC//DA$.

因此四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

显然，当两条直线相交时，它们的斜率不相等；反之，当两条直线的斜率不相等时，它们相交. 在相交的位置关系中，垂直是最特殊的情形. 当直线 l_1，l_2 垂直时，它们的斜率除了不相等外，是否还有特殊的数量关系？

设两条直线 l_1，l_2 的斜率分别为 k_1，k_2，则直线 l_1，l_2 的方向向量分别是 $\boldsymbol{a}=(1, k_1)$，$\boldsymbol{b}=(1, k_2)$，于是

$$l_1\perp l_2 \Leftrightarrow \boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b} \Leftrightarrow \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0 \Leftrightarrow 1\times1+k_1k_2=0，即 k_1k_2=-1.$$

也就是说，$l_1\perp l_2 \Leftrightarrow k_1k_2=-1$.

当直线 l_1 或 l_2 的倾斜角为 90°时，若 $l_1\perp l_2$，则另一条直线的倾斜角为 0°；反之亦然.

由上我们得到，如果两条直线都有斜率，且它们互相垂直，那么它们的斜率之积等于

-1；反之，如果两条直线的斜率之积等于-1，那么它们互相垂直. 即

$$\boxed{l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow k_1 k_2 = -1.}$$

例 4 已知 $A(-6, 0)$，$B(3, 6)$，$P(0, 3)$，$Q(6, -6)$，试判断直线 AB 与 PQ 的位置关系.

解： 直线 AB 的斜率 $k_{AB}=\dfrac{2}{3}$，

直线 PQ 的斜率 $k_{PQ}=-\dfrac{3}{2}$.

因为 $k_{AB}k_{PQ}=\dfrac{2}{3}\times\left(-\dfrac{3}{2}\right)=-1$，所以直线 $AB \perp PQ$.

例 5 已知 $A(5, -1)$，$B(1, 1)$，$C(2, 3)$ 三点，试判断$\triangle ABC$ 的形状.

分析： 如图 2.1-10，猜想 $AB \perp BC$，$\triangle ABC$ 是直角三角形.

解： 边 AB 所在直线的斜率 $k_{AB}=-\dfrac{1}{2}$，边 BC 所在直线的斜率 $k_{BC}=2$.

由 $k_{AB}k_{BC}=-1$，得 $AB \perp BC$，即$\angle ABC=90^\circ$.

所以$\triangle ABC$ 是直角三角形.

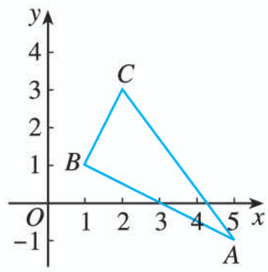


图 2.1-10

练习

1. 判断下列各对直线是否平行或垂直：

(1) 经过 $A(2, 3)$，$B(-1, 0)$ 两点的直线 l_1，与经过点 $P(1, 0)$ 且斜率为 1 的直线 l_2；

(2) 经过 $C(3, 1)$，$D(-2, 0)$ 两点的直线 l_3，与经过点 $M(1, -4)$ 且斜率为-5 的直线 l_4.

2. 试确定 m 的值，使过 $A(m, 1)$，$B(-1, m)$ 两点的直线与过 $P(1, 2)$，$Q(-5, 0)$ 两点的直线：

(1) 平行；(2) 垂直.

习题 2.1

复习巩固

1. 已知直线斜率的绝对值等于 1，求直线的倾斜角.

2. 已知四边形 $ABCD$ 的四个顶点是 $A(2, 3)$，$B(1, -1)$，$C(-1, -2)$，$D(-2, 2)$，求四边形 $ABCD$ 的四条边所在直线的斜率.

3. m 为何值时，(1) 经过 $A(-m, 6)$，$B(1, 3m)$ 两点的直线的斜率是 12？

(2) 经过 $A(m, 2)$，$B(-m, -2m-1)$ 两点的直线的倾斜角是 $60°$？

4. 已知 $A(1, 2)$，$B(-1, 0)$，$C(3, 4)$ 三点，这三点是否在同一条直线上？为什么？

5. 判断下列不同的直线 l_1 与 l_2 是否平行：

(1) l_1 的斜率为 2，l_2 经过 $A(1, 2)$，$B(4, 8)$ 两点；

(2) l_1 经过 $P(3, 3)$，$Q(-5, 3)$ 两点，l_2 平行于 x 轴，但不经过 P，Q 两点；

(3) l_1 经过 $M(-1, 0)$，$N(-5, -2)$ 两点，l_2 经过 $R(-4, 3)$，$S(0, 5)$ 两点.

6. 判断下列直线 l_1 与 l_2 是否垂直：

(1) l_1 的斜率为 $-\frac{2}{3}$，l_2 经过点 $A(1, 1)$，$B\left(0, -\frac{1}{2}\right)$；

(2) l_1 的倾斜角为 $45°$，l_2 经过 $P(-2, -1)$，$Q(3, -6)$ 两点；

(3) l_1 经过 $M(1, 0)$，$N(4, -5)$ 两点，l_2 经过 $R(-6, 0)$，$S(-1, 3)$ 两点.

综合运用

7. 过 $A(m^2+2, m^2-3)$，$B(3-m-m^2, 2m)$ 两点的直线 l 的倾斜角为 $45°$，求 m 的值.

8. 经过点 $P(0, -1)$ 作直线 l，若直线 l 与连接 $A(1, -2)$，$B(2, 1)$ 两点的线段总有公共点，求直线 l 的倾斜角 α 与斜率 k 的取值范围，并说明理由.

9. 已知点 $M(2, 2)$ 和 $N(5, -2)$，点 P 在 x 轴上，且 $\angle MPN$ 为直角，求点 P 的坐标.

拓广探索

10. 已知四边形 $ABCD$ 的四个顶点是 $A(2, 2+2\sqrt{2})$，$B(-2, 2)$，$C(0, 2-2\sqrt{2})$，$D(4, 2)$，求证：四边形 $ABCD$ 为矩形.

2.2 直线的方程

我们知道，给定一点和一个方向可以唯一确定一条直线. 这样，在平面直角坐标系中，给定一个点 $P_0(x_0, y_0)$ 和斜率 k（或倾斜角），就能唯一确定一条直线. 也就是说，这条直线上任意一点的坐标 (x, y) 与点 P_0 的坐标 (x_0, y_0) 和斜率 k 之间的关系是完全确定的. 那么，这一关系如何表示呢？下面我们就来研究这个问题.

2.2.1 直线的点斜式方程

如图 2.2-1，直线 l 经过点 $P_0(x_0, y_0)$，且斜率为 k. 设 $P(x, y)$ 是直线 l 上不同于点 P_0 的任意一点，因为直线 l 的斜率为 k，由斜率公式得

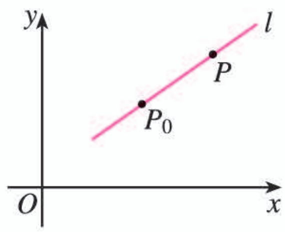


图 2.2-1

$$k=\frac{y-y_0}{x-x_0},$$

即

$$\boxed{y-y_0=k(x-x_0).}$$

> 点 P_0 的坐标 (x_0, y_0) 满足关系式 $y-y_0=k(x-x_0)$ 吗？

由上述推导过程可知：

(1) 直线 l 上每一个点的坐标 (x, y) 都满足关系式 $y-y_0=k(x-x_0)$；反过来，我们还可以验证

(2) 坐标满足关系式 $y-y_0=k(x-x_0)$ 的每一个点都在直线 l 上.

事实上，若点 $P_1(x_1, y_1)$ 的坐标 x_1，y_1 满足关系式 $y-y_0=k(x-x_0)$，则

$$y_1-y_0=k(x_1-x_0).$$

当 $x_1=x_0$ 时，$y_1=y_0$，这时点 P_1 与 P_0 重合，显然有点 P_1 在直线 l 上；

当 $x_1\neq x_0$ 时，有 $k=\dfrac{y_1-y_0}{x_1-x_0}$，这表明过点 P_1，P_0 的直线 l_1 的斜率为 k. 因为直线 l，l_1 的斜率都为 k，且都过

> 建立直线的方程，就是利用确定直线位置的几何要素，建立直线上任意一点的横坐标 x，纵坐标 y 所满足的关系式.

点 P_0，所以它们重合．所以，点 P_1 在直线 l 上．

由（1）（2）可得：坐标满足关系式 $y-y_0=k(x-x_0)$ 的点一定在直线 l 上；直线 l 上任意一点的坐标一定满足关系式 $y-y_0=k(x-x_0)$．我们把方程

$$y-y_0=k(x-x_0)$$

称为过点 $P_0(x_0,\ y_0)$，斜率为 k 的直线 l 的方程．

方程 $y-y_0=k(x-x_0)$ 由直线上一个定点 $(x_0,\ y_0)$ 及该直线的斜率 k 确定，我们把它叫做直线的**点斜式方程**，简称**点斜式**（point slope form）．

思考

（1）当直线 l 的倾斜角为 $0°$时，直线 l 的方程是什么？为什么？

（2）当直线 l 的倾斜角为 $90°$时，直线 l 的方程如何表示？为什么？

当直线 l 的倾斜角为 $0°$时（图 2.2-2），$\tan 0°=0$，即 $k=0$，这时直线 l 与 x 轴平行或重合，直线 l 的方程是

$$y-y_0=0，即\ y=y_0.$$

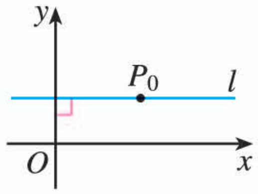


图 2.2-2

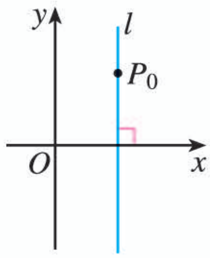


图 2.2-3

当直线 l 的倾斜角为 $90°$时（图 2.2-3），由于 $\tan 90°$无意义，直线没有斜率，这时直线 l 与 y 轴平行或重合，它的方程不能用点斜式表示．又因为这时直线 l 上每一点的横坐标都等于 x_0，所以它的方程是

$$x-x_0=0，即\ x=x_0.$$

例 1 直线 l 经过点 $P_0(-2,\ 3)$，且倾斜角 $\alpha=45°$，求直线 l 的点斜式方程，并画出直线 l．

解： 直线 l 经过点 $P_0(-2,\ 3)$，斜率 $k=\tan 45°=1$，代入点斜式方程得

$$y-3=x+2.$$

画图时，只需再找出直线 l 上的另一点 $P_1(x_1,\ y_1)$，例如，取 $x_1=-1$，则 $y_1=4$，得点 P_1 的坐标为 $(-1,\ 4)$，过 P_0，P_1 两点的直线即为所求，如图 2.2-4 所示．

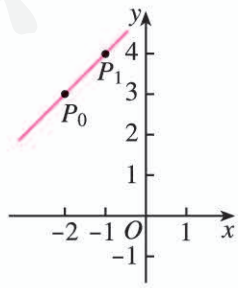


图 2.2-4

下面我们看点斜式的一种特殊情形：如果斜率为 k 的直线 l 过点 $P_0(0, b)$，这时 P_0 是直线 l 与 y 轴的交点，代入直线的点斜式方程，得

$$y-b=k(x-0),$$

即

$$\boxed{y=kx+b.}$$

我们把直线 l 与 y 轴的交点 $(0, b)$ 的纵坐标 b 叫做直线 l 在 y 轴上的**截距** (intercept). 这样，方程 $y=kx+b$ 由直线的斜率 k 与它在 y 轴上的截距 b 确定，我们把方程 $y=kx+b$ 叫做直线的**斜截式方程**，简称**斜截式** (slope intercept form). 其中，k 和 b 均有明显的几何意义：k 是直线的斜率，b 是直线在 y 轴上的截距.

截距是距离吗？

思考

方程 $y=kx+b$ 与我们学过的一次函数表达式类似. 我们知道，一次函数的图象是一条直线，你如何从直线方程的角度认识一次函数 $y=kx+b$？你能说出一次函数 $y=2x-1$，$y=3x$ 及 $y=-x+3$ 图象的特点吗？

例 2 已知直线 l_1：$y=k_1x+b_1$，l_2：$y=k_2x+b_2$，试讨论：(1) $l_1 /\!/ l_2$ 的条件是什么？(2) $l_1 \perp l_2$ 的条件是什么？

分析：回顾前面用斜率判断两条直线平行、垂直的结论，可以发现 $l_1 /\!/ l_2$ 或 $l_1 \perp l_2$ 时，k_1，k_2 与 b_1，b_2 应满足的关系.

解：(1) 若 $l_1 /\!/ l_2$，则 $k_1=k_2$，此时 l_1，l_2 与 y 轴的交点不同，即 $b_1 \neq b_2$；反之，若 $k_1=k_2$，且 $b_1 \neq b_2$，则 $l_1 /\!/ l_2$.

(2) 若 $l_1 \perp l_2$，则 $k_1k_2=-1$；反之，若 $k_1k_2=-1$，则 $l_1 \perp l_2$.

由例 2 我们得到，对于直线 l_1：$y=k_1x+b_1$，l_2：$y=k_2x+b_2$，

$$l_1 /\!/ l_2 \Leftrightarrow k_1=k_2，且 b_1 \neq b_2；$$

$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow k_1k_2=-1.$$

练习

1. 写出下列直线的点斜式方程：

(1) 经过点 $A(3, -1)$，斜率是 $\sqrt{2}$；

(2) 经过点 $B(-\sqrt{2}, 2)$，倾斜角是 $30°$；

(3) 经过点 $C(0, 3)$，倾斜角是 $0°$；

(4) 经过点 $D(-4，-2)$，倾斜角是$\frac{2\pi}{3}$.

2. 填空题.

(1) 已知直线的点斜式方程是 $y-2=x-1$，那么此直线的斜率是____，倾斜角是____；

(2) 已知直线的点斜式方程是 $y+2=\sqrt{3}(x+1)$，那么此直线的斜率是____，倾斜角是____.

3. 写出下列直线的斜截式方程：

(1) 斜率是$\frac{\sqrt{3}}{2}$，在 y 轴上的截距是-2；

(2) 斜率是-2，在 y 轴上的截距是 4.

4. 判断下列各对直线是否平行或垂直：

(1) l_1：$y=\frac{1}{2}x+3$，l_2：$y=\frac{1}{2}x-2$；　　(2) l_1：$y=\frac{5}{3}x$，l_2：$y=-\frac{3}{5}x$.

2.2.2　直线的两点式方程

思考

已知直线 l 经过两点 $P_1(x_1，y_1)$，$P_2(x_2，y_2)$（其中 $x_1\neq x_2$，$y_1\neq y_2$），因为两点确定一条直线，所以直线 l 是唯一确定的. 也就是说，对于直线 l 上的任意一点 $P(x，y)$，它的坐标与点 P_1，P_2 的坐标之间具有唯一确定的关系. 这一关系是什么呢?

由经过两点 P_1，P_2 的直线的斜率公式可以求出直线 l 的斜率，因此我们可以利用直线的点斜式方程来解决问题.

当 $x_1\neq x_2$ 时，经过两点 $P_1(x_1，y_1)$，$P_2(x_2，y_2)$ 的直线的斜率 $k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$. 任取 P_1，P_2 中的一点，例如，取点 $P_1(x_1，y_1)$，由直线的点斜式方程，得

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1),$$

当 $y_2\neq y_1$ 时，上式可写为

$$\boxed{\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}.}$$

> 不利用点斜式方程，你能求出两点式方程吗?

这就是经过两点 $P_1(x_1，y_1)$，$P_2(x_2，y_2)$（其中 $x_1\neq x_2$，$y_1\neq y_2$）的直线的方程，我们把它叫做直线的**两点式方程**，简称**两点式**（two-point form）.

在 $P_1(x_1，y_1)$，$P_2(x_2，y_2)$ 中，如果 $x_1=x_2$ 或 $y_1=y_2$，则直线 P_1P_2 没有两点式方程. 当 $x_1=x_2$ 时，直线 P_1P_2 垂直于 x 轴，直线方程为 $x-x_1=0$，即 $x=x_1$；当 $y_1=y_2$ 时，直线 P_1P_2 垂直于 y 轴，直线方程为 $y-y_1=0$，即 $y=y_1$.

例 3 如图 2.2-5，已知直线 l 与 x 轴的交点为 $A(a,\ 0)$，与 y 轴的交点为 $B(0,\ b)$，其中 $a\neq0$，$b\neq0$. 求直线 l 的方程.

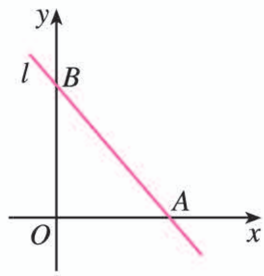


图 2.2-5

解： 将两点 $A(a,\ 0)$，$B(0,\ b)$ 的坐标代入两点式，得

$$\frac{y-0}{b-0}=\frac{x-a}{0-a},$$

即

$$\boxed{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.}$$

我们把直线 l 与 x 轴的交点 $(a,\ 0)$ 的横坐标 a 叫做直线 l 在 x 轴上的截距，此时直线 l 在 y 轴上的截距是 b. 方程 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ 由直线 l 在两条坐标轴上的截距 a 与 b 确定，我们把方程 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ 叫做直线的**截距式方程**，简称**截距式**（intercept form）.

例 4 已知$\triangle ABC$ 的三个顶点 $A(-5,\ 0)$，$B(3,\ -3)$，$C(0,\ 2)$，求边 BC 所在直线的方程，以及这条边上的中线 AM 所在直线的方程.

解： 如图 2.2-6，过 $B(3,\ -3)$，$C(0,\ 2)$ 的直线的两点式方程为

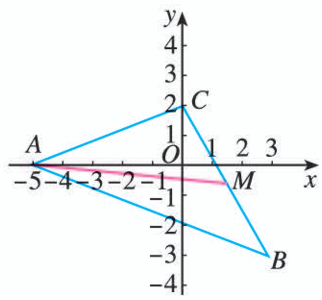


图 2.2-6

$$\frac{y-2}{-3-2}=\frac{x-0}{3-0},$$

整理得

$$5x+3y-6=0.$$

这就是边 BC 所在直线的方程.

边 BC 上的中线是顶点 A 与边 BC 中点 M 所连线段，由中点坐标公式，可得点 M 的坐标为

$$\left(\frac{3+0}{2},\ \frac{-3+2}{2}\right),$$

即 $\left(\frac{3}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$.

过 $A(-5,\ 0)$，$M\left(\frac{3}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$ 两点的直线方程为

$$\frac{y-0}{-\frac{1}{2}-0}=\frac{x+5}{\frac{3}{2}+5},$$

整理可得

$$x+13y+5=0.$$

这就是边 BC 上中线 AM 所在直线的方程.

直线的点斜式、斜截式、两点式、截距式方程都有明确的几何意义，都涉及确定直线位置的两个基本要素：两个点或一点和斜率．这些直线的方程，形式不同但本质一致，都是对直线的定量刻画．在对直线的定量刻画中，斜率处于核心地位．点斜式方程是其他所有形式的方程的基础，其他所有形式的方程都是点斜式方程在一定条件下的变式.

另外，利用直线的斜率、两点式等，我们可以进一步理解平面几何中“两点确定一条直线”的含义．事实上，对于直线 l 上的四个不同点 $P_i(x_i, y_i)$，$i=1, 2, 3, 4$，由 P_1，P_2 确定的直线方程与由 P_3，P_4 确定的直线方程是同一个方程，你能给出证明吗？

练习

1. 求经过下列两点的直线的两点式方程：

(1) $P_1(2, 1)$，$P_2(0, -3)$；　　(2) $A(0, 5)$，$B(5, 0)$.

2. 根据下列条件求直线的截距式方程，并画出图形：

(1) 在 x 轴、y 轴上的截距分别是 2，3；

(2) 在 x 轴、y 轴上的截距分别是 -5，6.

3. 根据下列条件，求直线的方程：

(1) 过点 $(0, 5)$，且在两坐标轴上的截距之和为 2；

(2) 过点 $(5, 0)$，且在两坐标轴上的截距之差为 2.

2.2.3　直线的一般式方程

观察直线的点斜式、斜截式、两点式、截距式方程，我们发现，它们都是关于 x，y 的二元一次方程．直线与二元一次方程是否都有这种关系呢？下面我们探讨这个问题.

思考

(1) 平面直角坐标系中的任意一条直线都可以用一个关于 x，y 的二元一次方程表示吗？

(2) 任意一个关于 x，y 的二元一次方程都表示一条直线吗？

先看问题 (1)．任意一条直线 l，在其上任取一点 $P_0(x_0, y_0)$，当直线 l 的斜率为 k 时（此时直线的倾斜角 $\alpha\neq 90°$），其方程为

$$y-y_0=k(x-x_0),$$

这是关于 x，y 的二元一次方程.

分类讨论时，常按 $\alpha\neq 90°$ 和 $\alpha=90°$ 分类，这样可以做到不重不漏.

当直线 l 的斜率不存在，即直线 l 的倾斜角 $\alpha=90^\circ$ 时，直线的方程为

$$x-x_0=0,$$

上述方程可以认为是关于 x，y 的二元一次方程，因为此时方程中 y 的系数为 0.

方程 $y-y_0=k(x-x_0)$ 和 $x-x_0=0$ 都是二元一次方程，因此平面直角坐标系中的任意一条直线都可以用一个关于 x，y 的二元一次方程表示.

反之，对于任意一个二元一次方程

$$Ax+By+C=0\ (A,\ B \text{ 不同时为 } 0),$$

如果能把它化为直线方程的某种形式，那么我们就可以断定它表示一条直线.

当 $B\neq 0$ 时，方程 $Ax+By+C=0$ 可变形为

$$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B},$$

它表示过点 $\left(0,\ -\frac{C}{B}\right)$，斜率为 $-\frac{A}{B}$ 的直线.

当 $B=0$ 时，$A\neq 0$，方程 $Ax+By+C=0$ 可变形为

$$x=-\frac{C}{A},$$

它表示过点 $\left(-\frac{C}{A},\ 0\right)$，且垂直于 x 轴的直线.

由上可知，关于 x，y 的二元一次方程都表示一条直线.

我们把关于 x，y 的二元一次方程

$$\boxed{Ax+By+C=0}$$

（其中 A，B 不同时为 0）叫做直线的**一般式方程**，简称**一般式**（general form）.

探究

在方程 $Ax+By+C=0$ 中，A，B，C 为何值时，方程表示的直线：

①平行于 x 轴？ ②平行于 y 轴？ ③与 x 轴重合？ ④与 y 轴重合？

例 5 已知直线经过点 $A(6,\ -4)$，斜率为 $-\frac{4}{3}$，求直线的点斜式和一般式方程.

解： 经过点 $A(6,\ -4)$，斜率为 $-\frac{4}{3}$ 的直线的点斜式方程是

$$y+4=-\frac{4}{3}(x-6),$$

化为一般式，得

$$4x+3y-12=0.$$

例 6 把直线 l 的一般式方程 $x-2y+6=0$ 化为斜截式，求出直线 l 的斜率以及它在 x 轴与 y 轴上的截距，并画出图形.

分析： 求直线 l 在 x 轴上的截距，即求直线 l 与 x 轴交点的横坐标，只要在直线 l 的方程中令 $y=0$ 即可得 x 的值.

解： 把直线 l 的一般式方程化为斜截式

$$y=\frac{1}{2}x+3.$$

因此，直线 l 的斜率 $k=\frac{1}{2}$，它在 y 轴上的截距是 3.

在直线 l 的方程 $x-2y+6=0$ 中，令 $y=0$，得

$$x=-6,$$

即直线 l 在 x 轴上的截距是 -6.

由上面可得直线 l 与 x 轴、y 轴的交点分别为

$$A(-6,\ 0),\ B(0,\ 3),$$

过 A，B 两点作直线，就得直线 l（图 2.2-7）.

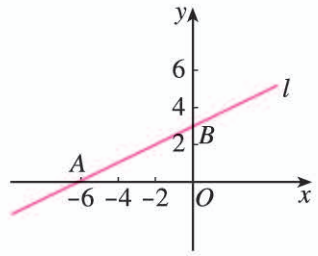


图 2.2-7

在直角坐标系中画直线时，通常找出直线与两条坐标轴的交点，然后连接这两个点.

结合例 6，我们可以从几何角度看一个二元一次方程，即一个二元一次方程表示一条直线.

在代数中，我们研究了二元一次方程的解．因为二元一次方程的每一组解都可以看成平面直角坐标系中一个点的坐标，所以这个方程的全体解组成的集合，就是坐标满足二元一次方程的全体点的集合，这些点的集合组成一条直线.

平面直角坐标系是把二元一次方程和直线联系起来的桥梁，这是笛卡儿的伟大贡献．在平面直角坐标系中，任意一个二元一次方程是直角坐标平面上一条确定的直线；反之，直角坐标平面上的任意一条直线可以用一个确定的二元一次方程表示.

练习

1. 根据下列条件，写出直线的方程，并把它化为一般式：

   (1) 经过点 $A(8,\ -2)$，斜率是 $-\frac{1}{2}$；　(2) 经过点 $B(4,\ 2)$，平行于 x 轴；

   (3) 经过点 $P_1(3,\ -2)$，$P_2(5,\ -4)$；　(4) 在 x 轴、y 轴上的截距分别是 $\frac{3}{2}$，-3.

2. 求下列直线的斜率以及在 y 轴上的截距，并画出图形：

   (1) $3x+y-5=0$；　(2) $\frac{x}{4}-\frac{y}{5}=1$；　(3) $x+2y=0$；　(4) $7x-6y+4=0$.

3. 已知直线 l 的方程是 $Ax+By+C=0$.

   (1) 当 $B\neq0$ 时，直线 l 的斜率是多少？当 $B=0$ 时呢？

   (2) 系数 A，B，C 取什么值时，方程 $Ax+By+C=0$ 表示经过原点的直线？

习题 2.2

复习巩固

1. 写出满足下列条件的直线的方程：

(1) 经过点 $A(8, -2)$，斜率是$\frac{\sqrt{3}}{3}$；

(2) 经过点 $B(-2, 0)$，且与 x 轴垂直；

(3) 斜率是-4，在 y 轴上的截距是 7；

(4) 经过 $A(-1, 8)$，$B(4, -2)$ 两点；

(5) 在 y 轴上的截距是 2，且与 x 轴平行；

(6) 在 x 轴、y 轴上的截距分别是 4，-3.

2. 判断 $A(1, 3)$，$B(5, 7)$，$C(10, 12)$ 三点是否共线，并说明理由.

3. 已知两点 $A(7, -4)$，$B(-5, 6)$，求线段 AB 的垂直平分线的方程.

4. 已知$\triangle ABC$ 的三个顶点 $A(8, 5)$，$B(4, -2)$，$C(-6, 3)$，求经过两边 AB 和 AC 的中点的直线的方程.

5. 一根弹簧，挂 4 N 的物体时，长 20 cm. 在弹性限度内，所挂物体的重量每增加 1 N，弹簧就伸长 1.5 cm. 试写出弹簧的长度 l（单位：cm）与所挂物体重量 G（单位：N）之间关系的方程.

6. 菱形的两条对角线分别位于 x 轴和 y 轴上，其长度分别为 8 和 6，求菱形各边所在直线的方程.

7. 求经过点 $P(2, 3)$，并且在两坐标轴上的截距相等的直线的方程.

8. 求满足下列条件的直线的方程：

(1) 经过点 $A(3, 2)$，且与直线 $4x+y-2=0$ 平行；

(2) 经过点 $C(2, -3)$，且平行于过 $M(1, 2)$ 和 $N(-1, -5)$ 两点的直线；

(3) 经过点 $B(3, 0)$，且与直线 $2x+y-5=0$ 垂直.

综合运用

9. $\triangle ABC$ 的三个顶点是 $A(4, 0)$，$B(6, 7)$，$C(0, 3)$，求：

(1) 边 BC 上的中线所在直线的方程；

(2) 边 BC 上的高所在直线的方程；

(3) 边 BC 的垂直平分线的方程.

10. 求直线 $Ax+By+C=0$（A，B 不同时为 0）的系数 A，B，C 分别满足什么关系时，这条直线有以下性质：

(1) 与两条坐标轴都相交；　　(2) 只与 x 轴相交；

(3) 只与 y 轴相交；　　(4) 是 x 轴所在的直线；

(5) 是 y 轴所在的直线.

11. 设点 $P_0(x_0, y_0)$ 在直线 $Ax+By+C=0$ 上，求证：这条直线的方程还可以写成

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0.$$

12. 若直线 l 沿 x 轴向左平移 3 个单位长度，再沿 y 轴向上平移 1 个单位长度后，回到原来的位置．试求直线 l 的斜率．

13. 一条光线从点 $P(6, 4)$ 射出，与 x 轴相交于点 $Q(2, 0)$，经 x 轴反射，求入射光线和反射光线所在直线的方程．

拓广探索

14. 已知直线 l_1，l_2 的方程分别是 l_1：$A_1x+B_1y+C_1=0$（A_1，B_1 不同时为 0），l_2：$A_2x+B_2y+C_2=0$（A_2，B_2 不同时为 0），且 $A_1A_2+B_1B_2=0$，求证：$l_1 \perp l_2$．

15. 画出直线 l：$2x-y+3=0$，并在直线 l 外取若干点，将这些点的坐标代入 $2x-y+3$，求它的值；观察有什么规律，并把这个规律表示出来．

探究与发现

方向向量与直线的参数方程

除了直线的点斜式、斜截式、两点式、截距式、一般式方程，还有一种形式的直线方程与向量有紧密的联系，它由一个定点和这条直线的方向向量唯一确定，与直线的点斜式方程本质上是一致的．

如图 1，设直线 l 经过点 $P_0(x_0, y_0)$，$\boldsymbol{v}=(m, n)$ 是它的一个方向向量，$P(x, y)$ 是直线 l 上的任意一点，则向量 $\overrightarrow{P_0P}$ 与 $\boldsymbol{v}$ 共线．根据向量共线的充要条件，存在唯一的实数 t，使 $\overrightarrow{P_0P}=t\boldsymbol{v}$，即 $(x-x_0, y-y_0)=t(m, n)$，所以

$$\begin{cases} x=x_0+mt, \\ y=y_0+nt. \end{cases} \quad ①$$

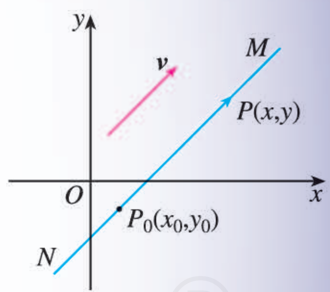


图 1

在①中，实数 t 是对应点 P 的参变数，简称参数．由上可知，对于直线 l 上的任意一点 $P(x, y)$，存在唯一实数 t 使①成立；反之，对于参数 t 的每一个确定的值，由①可以确定直线 l 上的一个点$P(x, y)$．我们把①称为直线的参数方程．

从运动学角度看，$\overrightarrow{P_0P}=t\boldsymbol{v}$（$t>0$）可以看成质点 P 从点 P_0 出发，以速度 $\boldsymbol{v}=(m, n)$ 作匀速直线运动，经过时间 t 后的位移，因此，质点 P 的运动轨迹是射线 P_0M．类似地，你能刻画射线 P_0N 吗？由以上讨论，你能说说方程①的运动学意义吗？

如果直线 l 与坐标轴不垂直，那么 $mn\neq 0$，由①可得

$$\frac{x-x_0}{m}=t,\ \frac{y-y_0}{n}=t,$$

消去参数 t，得

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n},$$

即

$$y-y_0=\frac{n}{m}(x-x_0),$$

这样就得到直线 l 的点斜式方程.

从另外一个角度思考，因为直线 l 经过点 $P_0(x_0,\ y_0)$，且它的一个方向向量为 $\boldsymbol{v}=(m,\ n)$，所以直线 l 的斜率 $k=\dfrac{n}{m}$，所以直线 l 的方程为

$$y-y_0=\frac{n}{m}\ (x-x_0).$$

想一想，直线的参数方程 $\begin{cases}x=x_0+mt,\\ y=y_0+nt\end{cases}$ 中，$(m,\ n)$ 的几何意义是什么？

2.3 直线的交点坐标与距离公式

在平面几何中，我们对直线作了定性研究．引入平面直角坐标系后，我们用二元一次方程表示直线，直线的方程就是相应直线上每一点的坐标所满足的一个关系式．这样，我们可以通过方程把握直线上的点，进而用代数方法对直线进行定量研究，例如求两条直线的交点坐标，平面内与点、直线相关的距离问题等．

2.3.1 两条直线的交点坐标

思考

已知两条直线

$$l_1: A_1x+B_1y+C_1=0,$$
$$l_2: A_2x+B_2y+C_2=0$$

相交，它们的交点坐标与直线 l_1，l_2 的方程有什么关系？你能由此得到求两条相交直线交点坐标的方法吗？

设这两条直线的交点为 P，则点 P 既在直线 l_1 上，也在直线 l_2 上．所以点 P 的坐标既满足直线 l_1 的方程 $A_1x+B_1y+C_1=0$，也满足直线 l_2 的方程 $A_2x+B_2y+C_2=0$，即点 P 的坐标是方程组

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1=0,\\A_2x+B_2y+C_2=0\end{cases}$$

的解．解这个方程组就可以得到这两条直线的交点坐标．

例 1 求下列两条直线的交点坐标，并画出图形：

$$l_1: 3x+4y-2=0,$$
$$l_2: 2x+y+2=0.$$

解： 解方程组

$$\begin{cases}3x+4y-2=0,\\2x+y+2=0,\end{cases}$$

得

$$\begin{cases} x=-2, \\ y=2. \end{cases}$$

所以，l_1 与 l_2 的交点是 $M(-2, 2)$（图 2.3-1）.

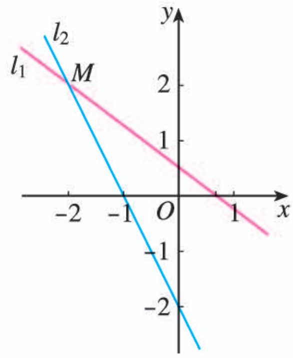


图 2.3-1

例 2 判断下列各对直线的位置关系. 如果相交，求出交点的坐标：

(1) l_1：$x-y=0$，　　l_2：$3x+3y-10=0$；

(2) l_1：$3x-y+4=0$，　　l_2：$6x-2y-1=0$；

(3) l_1：$3x+4y-5=0$，　　l_2：$6x+8y-10=0$.

分析：解直线 l_1，l_2 的方程组成的方程组，若方程组有唯一解，则 l_1 与 l_2 相交，此解就是交点的坐标；若方程组无解，则 $l_1 /\!/ l_2$；若方程组中的两个方程可化成同一个方程，则 l_1 与 l_2 重合.

解：(1) 解方程组

$$\begin{cases} x-y=0, \\ 3x+3y-10=0, \end{cases}$$

得

$$\begin{cases} x=\dfrac{5}{3}, \\ y=\dfrac{5}{3}. \end{cases}$$

所以，l_1 与 l_2 相交，交点是 $M\left(\dfrac{5}{3}, \dfrac{5}{3}\right)$.

(2) 解方程组

$$\begin{cases} 3x-y+4=0, & ① \\ 6x-2y-1=0, & ② \end{cases}$$

①×2－②得 $9=0$，矛盾，这个方程组无解，所以 l_1 与 l_2 无公共点，$l_1 /\!/ l_2$.

(3) 解方程组

$$\begin{cases} 3x+4y-5=0, & ① \\ 6x+8y-10=0, & ② \end{cases}$$

①×2 得 $6x+8y-10=0$.

①和②可以化成同一个方程，即①和②表示同一条直线，l_1 与 l_2 重合.

思考

你能用直线的斜率判断上述各对直线的位置关系吗？比较用斜率判断和解方程组这两种方法，你有什么体会？

练习

1. 求下列两条直线的交点坐标，并画出图形：

(1) l_1：$2x+3y=12$，　　l_2：$x-2y=4$；

(2) l_1：$x=2$，　　l_2：$3x+2y-12=0$.

2. 判断下列各对直线的位置关系. 如果相交，求出交点的坐标：

(1) l_1：$2x-3y=7$，　　l_2：$4x+2y=1$；

(2) l_1：$2x-6y+4=0$，　　l_2：$y=\dfrac{x}{3}+\dfrac{2}{3}$；

(3) l_1：$(\sqrt{2}-1)x+y=3$，　　l_2：$x+(\sqrt{2}+1)y=2$.

3. 直线 l 经过原点，且经过直线 $2x-2y-1=0$ 与直线 $6x-4y+1=0$ 的交点，求直线 l 的方程.

2.3.2　两点间的距离公式

我们知道，在各种几何量中，直线段的长度是最基本的. 因此，在解析几何中，最基本的公式自然是用平面内两点的坐标表示这两点间距离的公式.

探究

如图 2.3-2，已知平面内两点 $P_1(x_1,\ y_1)$，$P_2(x_2,\ y_2)$，如何求 P_1，P_2 间的距离 $|P_1P_2|$？

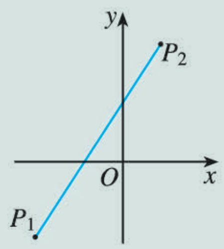


图 2.3-2

我们用平面向量的知识来解决. 如图 2.3-3，由点 $P_1(x_1,\ y_1)$，$P_2(x_2,\ y_2)$，得 $\overrightarrow{P_1P_2}=(x_2-x_1,\ y_2-y_1)$. 于是，

$$|\overrightarrow{P_1P_2}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

由此得到 $P_1(x_1,\ y_1)$，$P_2(x_2,\ y_2)$ 两点间的距离公式

$$\boxed{|P_1P_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.}$$

特别地，原点 $O(0,\ 0)$ 与任一点 $P(x,\ y)$ 间的距离

$$|OP|=\sqrt{x^2+y^2}.$$

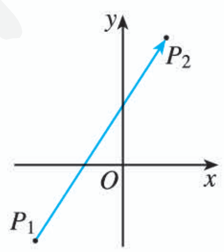


图 2.3-3

思考

你能利用 $P_1(x_1, y_1)$，$P_2(x_2, y_2)$ 构造直角三角形，再用勾股定理推导两点间距离公式吗？与向量法比较，你有什么体会？

例 3 已知点 $A(-1, 2)$，$B(2, \sqrt{7})$，在 x 轴上求一点 P，使 $|PA|=|PB|$，并求 $|PA|$ 的值.

解： 设所求点为 $P(x, 0)$，则

$$|PA|=\sqrt{(x+1)^2+(0-2)^2}=\sqrt{x^2+2x+5},$$

$$|PB|=\sqrt{(x-2)^2+(0-\sqrt{7})^2}=\sqrt{x^2-4x+11}.$$

由 $|PA|=|PB|$，得

$$x^2+2x+5=x^2-4x+11.$$

解得 $x=1$.

所以，所求点为 $P(1, 0)$，且

$$|PA|=\sqrt{(1+1)^2+(0-2)^2}=2\sqrt{2}.$$

例 4 用坐标法证明：平行四边形两条对角线的平方和等于两条邻边的平方和的两倍.

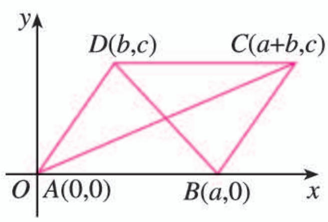


图 2.3-4

分析： 首先要建立适当的平面直角坐标系，用坐标表示有关的量，然后进行代数运算，最后把代数运算的结果“翻译”成几何关系.

证明： 如图 2.3-4，四边形 $ABCD$ 是平行四边形. 以顶点 A 为原点，边 AB 所在直线为 x 轴，建立如图所示的平面直角坐标系.

在▱$ABCD$ 中，点 A 的坐标是 $(0, 0)$，设点 B 的坐标为 $(a, 0)$，点 D 的坐标为 (b, c)，由平行四边形的性质，得点 C 的坐标为 $(a+b, c)$.

> ？如何由平行四边形的性质，得到点 C 的坐标为 $(a+b, c)$？

由两点间的距离公式，得

$$|AC|^2=(a+b)^2+c^2,\quad |BD|^2=(b-a)^2+c^2,\quad |AB|^2=a^2,\quad |AD|^2=b^2+c^2.$$

所以

$$|AC|^2+|BD|^2=2(a^2+b^2+c^2),$$

$$|AB|^2+|AD|^2=a^2+b^2+c^2.$$

所以

$$|AC|^2+|BD|^2=2(|AB|^2+|AD|^2),$$

即平行四边形两条对角线的平方和等于两条邻边的平方和的两倍.

思考

在“平面向量及其应用”的学习中，我们用“向量法”证明过这个命题. 你能回忆一下证明过程吗？比较“坐标法”和“向量法”，你有什么体会？

上述利用“坐标法”解决平面几何问题的基本步骤可以概括为

第一步：建立坐标系，用坐标表示有关的量 → 第二步：进行有关代数运算 → 第三步：把代数运算的结果“翻译”成几何结论

思考

根据例 4 的条件，你是否还有其他建立坐标系的方法？你能说说建立适当坐标系对证明的重要性吗？

练习

1. 求下列两点间的距离：

(1) $A(6, 0)$，$B(-2, 0)$；　　(2) $C(0, -4)$，$D(0, -1)$；

(3) $P(6, 0)$，$Q(0, -2)$；　　(4) $M(2, 1)$，$N(5, -1)$.

2. 已知 $A(a, -5)$ 与 $B(0, 10)$ 两点间的距离是 17，求 a 的值.

3. 用坐标法证明：直角三角形斜边的中点到三个顶点的距离相等.

2.3.3　点到直线的距离公式

探究

如图 2.3-5，已知点 $P(x_0, y_0)$，直线 l：$Ax+By+C=0$，如何求点 P 到直线 l 的距离？

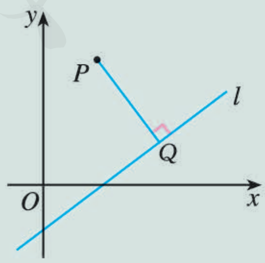


图 2.3-5

点 P 到直线 l 的距离，就是从点 P 到直线 l 的垂线段 PQ 的长度，其中 Q 是垂足（图 2.3-5）. 因此，求出垂足 Q 的坐标，利用两点间的距离公式求出 $|PQ|$，就可以得到

点 P 到直线 l 的距离.

设 $A\neq0$，$B\neq0$. 由 $PQ\perp l$，以及直线 l 的斜率为 $-\frac{A}{B}$，可得 l 的垂线 PQ 的斜率为 $\frac{B}{A}$，因此，垂线 PQ 的方程为 $y-y_0=\frac{B}{A}(x-x_0)$，即 $Bx-Ay=Bx_0-Ay_0$.

解方程组

$$\begin{cases}Ax+By+C=0,\\ Bx-Ay=Bx_0-Ay_0,\end{cases} \qquad ①$$

得直线 l 与 PQ 的交点坐标，即垂足 Q 的坐标为

$$\left(\frac{B^2x_0-ABy_0-AC}{A^2+B^2},\ \frac{-ABx_0+A^2y_0-BC}{A^2+B^2}\right).$$

于是

$$|PQ|=\sqrt{\left(\frac{B^2x_0-ABy_0-AC}{A^2+B^2}-x_0\right)^2+\left(\frac{-ABx_0+A^2y_0-BC}{A^2+B^2}-y_0\right)^2}$$

$$=\sqrt{\frac{(Ax_0+By_0+C)^2}{A^2+B^2}}=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

因此，点 $P(x_0，y_0)$ 到直线 l：$Ax+By+C=0$ 的距离

$$\boxed{d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.}$$

可以验证，当 $A=0$，或 $B=0$ 时，上述公式仍然成立.

思考

上述方法中，我们根据点到直线距离的定义，将点到直线的距离转化为两点之间的距离，思路自然但运算量较大. 反思求解过程，你发现引起复杂运算的原因了吗？由此能否给出简化运算的方法？

在上述方法中，若设垂足 Q 的坐标为 $(x，y)$，则

$$|PQ|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}. \qquad ②$$

对于②式，你能给出它的几何意义吗？结合方程组①，能否直接求出 $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2$，进而求出 $|PQ|$ 呢？请你试一试！

探究

我们知道，向量是解决距离、角度问题的有力工具. 能否用向量方法求点到直线的距离？

如图 2.3-6，点 P 到直线 l 的距离，就是向量 $\overrightarrow{PQ}$ 的模.

设 $M(x, y)$ 是直线 l 上的任意一点，$\boldsymbol{n}$ 是与直线 l 的方向向量垂直的单位向量，则 $\overrightarrow{PQ}$ 是 $\overrightarrow{PM}$ 在 $\boldsymbol{n}$ 上的投影向量，$|\overrightarrow{PQ}|=|\overrightarrow{PM}\cdot\boldsymbol{n}|$.

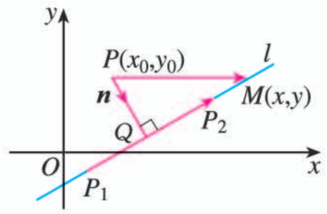


图 2.3-6

思考

如何利用直线 l 的方程得到与 l 的方向向量垂直的单位向量 $\boldsymbol{n}$?

设 $P_1(x_1, y_1)$，$P_2(x_2, y_2)$ 是直线 l：$Ax+By+C=0$ 上的任意两点，则 $\overrightarrow{P_1P_2}=(x_2-x_1, y_2-y_1)$ 是直线 l 的方向向量. 把 $Ax_1+By_1+C=0$，$Ax_2+By_2+C=0$ 两式相减，得 $A(x_2-x_1)+B(y_2-y_1)=0$. 由平面向量的数量积运算可知，向量 (A, B) 与向量 (x_2-x_1, y_2-y_1) 垂直. 向量 $\dfrac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}(A, B)$ 就是与直线 l 的方向向量垂直的一个单位向量. 我们取 $\boldsymbol{n}=\dfrac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}(A, B)$，从而

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PM}\cdot\boldsymbol{n}&=(x-x_0, y-y_0)\cdot\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}(A, B)\\&=\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}[A(x-x_0)+B(y-y_0)]\\&=\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}(Ax+By-Ax_0-By_0).\end{aligned}$$

因为点 $M(x, y)$ 在直线 l 上，所以 $Ax+By+C=0$. 所以 $Ax+By=-C$. 代入上式，得

$$\overrightarrow{PM}\cdot\boldsymbol{n}=\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}(-Ax_0-By_0-C).$$

因此

$$|PQ|=|\overrightarrow{PQ}|=|\overrightarrow{PM}\cdot\boldsymbol{n}|=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

思考

比较上述两种方法，第一种方法从定义出发，把问题转化为求两点间的距离，通过代数运算得到结果，思路自然；第二种方法利用向量投影，通过向量运算求出结果，简化了运算. 除了上述两种方法，你还有其他推导方法吗?

例 5 求点 $P(-1, 2)$ 到直线 l：$3x=2$ 的距离.

分析：将直线 l 的方程写成 $3x-2=0$，再用点到直线的距离公式求解.

直线 l 有什么特性？由此你能给出简便解法吗？

解：点 $P(-1, 2)$ 到直线 l：$3x-2=0$ 的距离

$$d=\frac{|3\times(-1)-2|}{\sqrt{3^2+0^2}}=\frac{5}{3}.$$

例 6 已知$\triangle ABC$ 的三个顶点分别是 $A(1, 3)$，$B(3, 1)$，$C(-1, 0)$，求$\triangle ABC$ 的面积.

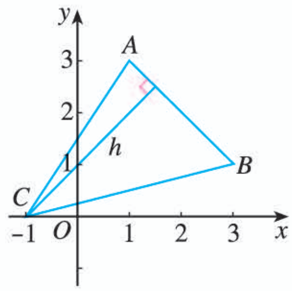


图 2.3-7

分析：由三角形面积公式可知，只要利用距离公式求出边 AB 的长和边 AB 上的高即可.

解：如图 2.3-7，设边 AB 上的高为 h，则

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|AB|h.$$

$$|AB|=\sqrt{(3-1)^2+(1-3)^2}=2\sqrt{2}.$$

边 AB 上的高 h 就是点 C 到直线 AB 的距离.

边 AB 所在直线 l 的方程为

$$\frac{y-3}{1-3}=\frac{x-1}{3-1},$$

即 $x+y-4=0$.

点 $C(-1, 0)$ 到直线 l：$x+y-4=0$ 的距离

$$h=\frac{|-1+0-4|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{5}{\sqrt{2}}.$$

因此，$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times\frac{5}{\sqrt{2}}=5$.

你还有其他解法吗？

练习

1. 求原点到下列直线的距离：

(1) l：$3x+2y-26=0$；　　(2) l：$x=y$.

2. 求下列点到直线的距离：

(1) $A(-2, 3)$，　　l：$3x+4y+3=0$；

(2) $B(1, 0)$，　　l：$\sqrt{3}x+y-\sqrt{3}=0$；

(3) $C(1, -2)$，　　l：$4x+3y=0$.

3. 已知点 $P(-1, 2)$ 到直线 l：$4x-3y+C=0$ 的距离为 1，求 C 的值.

2.3.4 两条平行直线间的距离

前面我们已经得到了两点间的距离公式、点到直线的距离公式. 关于平面上的距离问题，两条平行直线间的距离也是值得研究的.

两条平行直线间的距离是指夹在这两条平行直线间的公垂线段的长.

思考

已知两条平行直线 l_1，l_2 的方程，如何求 l_1 与 l_2 间的距离?

根据两条平行直线间距离的含义，在直线 l_1 上任取一点 $P(x_0, y_0)$，点 $P(x_0, y_0)$ 到直线 l_2 的距离就是直线 l_1 与直线 l_2 间的距离. 这样，求两条平行直线间的距离就转化为求点到直线的距离.

例 7 已知两条平行直线 l_1：$2x-7y-8=0$，l_2：$6x-21y-1=0$，求 l_1 与 l_2 间的距离.

分析：在 l_1 上选取一点，如 l_1 与坐标轴的交点，用点到直线的距离公式求这点到 l_2 的距离，即 l_1 与 l_2 间的距离.

解：先求 l_1 与 x 轴的交点 A 的坐标. 容易知道，点 A 的坐标为 $(4, 0)$.

点 A 到直线 l_2 的距离

$$d=\frac{|6\times4-21\times0-1|}{\sqrt{6^2+21^2}}=\frac{23}{3\sqrt{53}}=\frac{23}{159}\sqrt{53},$$

所以 l_1 与 l_2 间的距离为 $\frac{23}{159}\sqrt{53}$.

> ? 如何取点，可使计算简单?

例 8 求证：两条平行直线 $Ax+By+C_1=0$ 与 $Ax+By+C_2=0$ 间的距离为

$$d=\frac{|C_1-C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

分析：两条平行直线间的距离即为这两条平行直线中的一条直线上的一点到另一条直线的距离.

证明：在直线 $Ax+By+C_1=0$ 上任取一点 $P(x_0, y_0)$，点 $P(x_0, y_0)$ 到直线 $Ax+By+C_2=0$ 的距离就是这两条平行直线间的距离，即

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

因为点 $P(x_0, y_0)$ 在直线 $Ax+By+C_1=0$ 上，所以 $Ax_0+By_0+C_1=0$，即 $Ax_0+By_0=-C_1$，因此

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{|-C_1+C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{|C_1-C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

练习

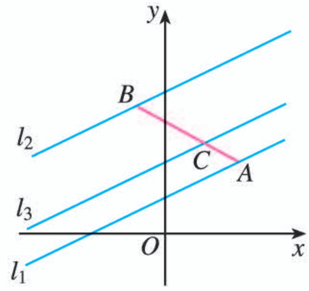
1. 求下列两条平行直线间的距离：

(1) l_1：$2x+3y-8=0$，　　l_2：$2x+3y+18=0$；

(2) l_1：$3x+4y=10$，　　l_2：$3x+4y=0$.

2. 已知两条平行直线 l_1：$3x-4y+6=0$ 与 l_2：$3x-4y+C=0$ 间的距离为 3，求 C 的值.

3. 如图，已知直线 l_1：$x-2y+1=0$ 与直线 l_2：$x-2y+4=0$，在 l_1 上任取一点 A，在 l_2 上任取一点 B，连接 AB，取 AB 的靠近点 A 的三等分点 C，过点 C 作 l_1 的平行线 l_3. 求 l_1 与 l_3 间的距离.



（第 3 题）

习题 2.3

复习巩固

1. 判断下列各对直线的位置关系. 如果相交，求出交点的坐标：

(1) l_1：$2x-y+7=0$，　　l_2：$x+y=1$；

(2) l_1：$x-3y-10=0$，　　l_2：$y=\dfrac{x+5}{3}$；

(3) l_1：$3x-5y+10=0$，　　l_2：$9x-15y+30=0$.

2. 求满足下列条件的直线 l 的方程：

(1) 经过两条直线 $2x-3y+10=0$ 和 $3x+4y-2=0$ 的交点，且垂直于直线 $3x-2y+4=0$；

(2) 经过两条直线 $2x+y-8=0$ 和 $x-2y+1=0$ 的交点，且平行于直线 $4x-3y-7=0$.

3. 已知 $A(1，2)$，$B(2，0)$，$M(1，0)$，$N(-4，0)$，$P(0，3)$，$Q(-1，1)$ 六个点，线段 AB，MN，PQ 能围成一个三角形吗？为什么？

4. 已知 $P(a，2)$，$Q(-2，-3)$，$M(1，1)$ 三点，且 $|PQ|=|PM|$，求 a 的值.

5. (1) 求在 x 轴上与点 $A(5，12)$ 的距离为 13 的点的坐标；

(2) 已知点 P 的横坐标是 7，点 P 与点 $N(-1，5)$ 间的距离等于 10，求点 P 的纵坐标.

6. 求点 $P(-5，7)$ 到直线 $12x+5y-3=0$ 的距离.

7. 求两条平行直线 $3x-2y-1=0$ 与 $3x-2y+1=0$ 间的距离.

8. $\square ABCD$ 的一组对边 AB 和 CD 所在直线的方程分别是 $6x+8y-3=0$ 与 $6x+8y+5=0$，过 $\square ABCD$ 的两条对角线的交点作与 AB 所在直线的平行线 l，求 l 与 CD 所在直线的距离.

综合运用

9. 三条直线 $ax+2y+8=0$，$4x+3y=10$ 与 $2x-y=10$ 相交于一点，求 a 的值.

10. 已知$\triangle ABC$ 的顶点 $A(5，1)$，边 AB 上的中线 CM 所在直线方程为 $2x-y-5=0$，边 AC 上的高 BH 所在直线方程为 $x-2y-5=0$. 求：(1) 顶点 C 的坐标；(2) 直线 BC 的方程.

11. 在 x 轴上求一点 P，使以 $A(1，2)$，$B(3，4)$ 和 P 为顶点的三角形的面积为 10.

12. 已知 AO 是$\triangle ABC$ 边 BC 的中线，用坐标法证明 $|AB|^2+|AC|^2=2(|AO|^2+|OC|^2)$.

13. 已知点 $A(a, 6)$ 到直线 $3x-4y=2$ 的距离 d 分别为下列各值：(1) $d=4$；(2) $d>4$，求 a 的取值范围.

14. 已知 $A(-3, -4)$，$B(6, 3)$ 两点到直线 l：$ax+y+1=0$ 的距离相等，求 a 的值.

15. $\square ABCD$ 的四条边所在直线的方程分别是 l_1：$x-4y+5=0$，l_2：$2x+y-8=0$，l_3：$x-4y+14=0$，l_4：$2x+y+1=0$，求 $\square ABCD$ 的面积.

拓广探索

16. 已知 λ 为任意实数，当 λ 变化时，方程

$$3x+4y-2+\lambda(2x+y+2)=0$$

表示什么图形？图形有何特点？

17. 已知 $0<x<1$，$0<y<1$.

(1) 求证：$\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x^2+(1-y)^2}+\sqrt{(1-x)^2+y^2}+\sqrt{(1-x)^2+(1-y)^2}\geqslant 2\sqrt{2}$，并求使等式成立的条件.

(2) 说明上述不等式的几何意义.

阅读与思考

笛卡儿与解析几何


笛卡儿

解析几何的创立适应了17世纪科学技术发展的迫切需要. 法国数学家笛卡儿（Descartes，1596—1650）是解析几何的创始人之一. 他对当时的几何方法和代数方法进行比较，分析了它们各自的优缺点. 他认为，没有任何东西比几何图形更容易印入人脑，用图形表达事物非常有益. 但他对欧几里得几何中许多定理的证明需要某种奇巧的想法深感不安，他还批评古希腊人的几何过多地依赖图形. 他看到了代数的力量，认为代数在提供广泛的方法论方面高于欧几里得的几何学. 他认为，代数具有一般性，例如用字母代替数时，可以代表各种数：正数、负数和0；代数中的公式可以使解题过程机械化；代数具有作为一门普遍的科学方法的潜力.

笛卡儿的中心思想是使代数和几何结合起来. 他说："我决心放弃那个仅仅是抽象的几何，这就是说，不再去考虑那些仅仅是用来练习思想的问题. 我这样做，是为了研究另一种几何，即目的在于解释自然现象的几何."

笛卡儿曾计划写一本书《思想的指导法则》，在书中他大胆地提出了一个解决一切问题的方案：把一切问题归结为数学问题，把一切数学问题归结为代数问题，把一切代数问题归结为方程，最后得到关于一个未知数的方程．可能不久他自己就发现这个设想过于大胆，根本无法实现，这本书没有写完就搁下了（在他去世后人们将它出版）．他的这个方案虽然失败了，但确有很多问题可以用列方程的方法来解．

1637 年笛卡儿发表了《更好地指导推理和寻找科学真理的方法论》，这是一本哲学的经典著作，包含了三个附录，《几何学》就是其中之一．《几何学》是笛卡儿所写的唯一一本数学书．笛卡儿在《几何学》中引入了坐标方法和用方程表示曲线的思想．于是后人就把这本《几何学》的发表作为解析几何创立的标志．

笛卡儿最初所使用的坐标系中，两条坐标轴的夹角不要求一定是直角，而且 y 轴并没有明显地出现．至于“坐标”“坐标系”“横坐标”“纵坐标”等名词，也都是后来人们逐渐使用的．虽然笛卡儿当初的坐标系还不够完善，但是笛卡儿当初迈出的第一步具有决定意义，所以人们仍然把后来的直角坐标系，叫做笛卡儿直角坐标系．

差不多与笛卡儿同时，另一位法国数学家费马（Fermat，1601—1665）在自己的研究中也独立地形成了用方程表示曲线的思想．因此，费马和笛卡儿同为解析几何的创始人．


费马

解析几何的创立在数学发展史上具有划时代的意义，是数学发展史上的一个里程碑．它促进了微积分的创立，从此数学进入了变量数学的新时期．正如恩格斯在《自然辩证法》一书中所指出的：“数学中的转折点是笛卡儿的变数，有了变数，运动进入了数学，有了变数，辩证法进入了数学，有了变数，微分和积分也就立刻成为必要的了．”

解析几何的创立提供了研究几何问题的一种新方法，借助于坐标系，把几何问题转化为代数问题来研究．这种方法具有一般性，它沟通了数学内部数与形、代数与几何两大学科之间的联系．从此代数和几何互相汲取新鲜的活力，得到迅速的发展．

2.4 圆的方程

多边形和圆是平面几何中的两类基本图形. 建立直线的方程后，我们可以运用它研究多边形这些“直线形”，解决边所在直线的平行或垂直、边与边的交点以及点到线段所在直线的距离等问题. 类似地，为了研究圆的有关性质，解决与圆有关的问题，我们首先需要建立圆的方程.

2.4.1 圆的标准方程

类似于直线方程的建立过程，为建立圆的方程，我们首先考虑确定一个圆的几何要素.

思考

在平面直角坐标系中，如何确定一个圆呢?

我们知道，圆是平面上到定点的距离等于定长的点的集合. 在平面直角坐标系中，如果一个圆的圆心坐标和半径确定了，圆就唯一确定了. 由此，我们可以建立圆上点的坐标应满足的关系式，进而得到圆的方程.

如图 2.4-1，在平面直角坐标系中，$\odot A$ 的圆心 A 的坐标为 (a, b)，半径为 r，$M(x, y)$ 为圆上任意一点，$\odot A$ 就是以下点的集合

$$P=\{M \mid |MA|=r\}.$$

根据两点间的距离公式，点 M 的坐标 (x, y) 满足的条件可以表示为

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r,$$

两边平方，得

$$\boxed{(x-a)^2+(y-b)^2=r^2.} \qquad (1)$$

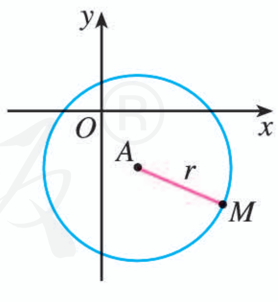


图 2.4-1

由上述过程可知，若点 $M(x, y)$ 在$\odot A$ 上，点 M 的坐标就满足方程(1)；反过来，若点 M 的坐标 (x, y) 满足方程(1)，就说明点 M 与圆心 A 间的距离为 r，点 M 就在$\odot A$ 上. 这时，我们把方程(1)称为圆心为 $A(a, b)$，半径为 r 的**圆的标准方程** (standard equation of circle).

> ? 圆心在坐标原点，半径为 r 的圆的标准方程是什么?

例 1 求圆心为 $A(2,\ -3)$，半径为 5 的圆的标准方程，并判断点 $M_1(5,\ -7)$，$M_2(-2,\ -1)$ 是否在这个圆上.

分析： 根据点的坐标与圆的方程的关系，只要判断一个点的坐标是否满足圆的方程，就可以得到这个点是否在圆上.

解： 圆心为 $A(2,\ -3)$，半径为 5 的圆的标准方程是

$$(x-2)^2+(y+3)^2=25.$$

把点 $M_1(5,\ -7)$ 的坐标代入方程 $(x-2)^2+(y+3)^2=25$ 的左边，得 $(5-2)^2+(-7+3)^2=25$，左右两边相等，点 M_1 的坐标满足圆的方程，所以点 M_1 在这个圆上.

把点 $M_2(-2,\ -1)$ 的坐标代入方程 $(x-2)^2+(y+3)^2=25$ 的左边，得 $(-2-2)^2+(-1+3)^2=20$，左右两边不相等，点 M_2 的坐标不满足圆的方程，所以点 M_2 不在这个圆上（图 2.4-2）.

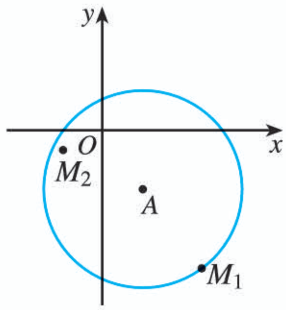


图 2.4-2

探究

点 $M_0(x_0,\ y_0)$ 在圆 $x^2+y^2=r^2$ 内的条件是什么？在圆 $x^2+y^2=r^2$ 外的条件又是什么？

例 2 $\triangle ABC$ 的三个顶点分别是 $A(5,\ 1)$，$B(7,\ -3)$，$C(2,\ -8)$，求 $\triangle ABC$ 的外接圆的标准方程.

> $\triangle ABC$ 的外接圆的圆心是 $\triangle ABC$ 的外心，即 $\triangle ABC$ 三边垂直平分线的交点.

分析： 不在同一条直线上的三个点可以确定一个圆，三角形有唯一的外接圆. 显然已知的三个点不在同一条直线上. 只要确定了 a，b，r，圆的标准方程就确定了.

解： 设所求的方程是

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2. \quad ①$$

因为 $A(5,\ 1)$，$B(7,\ -3)$，$C(2,\ -8)$ 三点都在圆上，所以它们的坐标都满足方程①. 于是

$$\begin{cases}(5-a)^2+(1-b)^2=r^2,\\(7-a)^2+(-3-b)^2=r^2,\\(2-a)^2+(-8-b)^2=r^2,\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}a^2+b^2-10a-2b+26=r^2,\\a^2+b^2-14a+6b+58=r^2,\\a^2+b^2-4a+16b+68=r^2.\end{cases}$$

观察上面的式子，我们发现，三式两两相减，可以消去 a^2，b^2，r^2，得到关于 a，b 的二元一次方程组

$$\begin{cases}a-2b=8,\\a+b=-1.\end{cases}$$

解此方程组，得

$$\begin{cases}a=2,\\b=-3,\end{cases}$$

代入 $(5-a)^2+(1-b)^2=r^2$，得 $r^2=25$.

所以，$\triangle ABC$ 的外接圆的标准方程是

$$(x-2)^2+(y+3)^2=25.$$

例 3 已知圆心为 C 的圆经过 $A(1,\ 1)$，$B(2,\ -2)$ 两点，且圆心 C 在直线 l：$x-y+1=0$ 上，求此圆的标准方程.

分析： 设圆心 C 的坐标为 $(a,\ b)$. 由已知条件可知，$|CA|=|CB|$，且 $a-b+1=0$. 由此可求出圆心坐标和半径.

另外，因为线段 AB 是圆的一条弦，根据平面几何知识，AB 的中点与圆心 C 的连线垂直于 AB，由此可得到另一种解法.

解法 1： 设圆心 C 的坐标为 $(a,\ b)$. 因为圆心 C 在直线 l：$x-y+1=0$ 上，所以

$$a-b+1=0. \quad ①$$

因为 A，B 是圆上两点，所以 $|CA|=|CB|$.

根据两点间距离公式，有

$$\sqrt{(a-1)^2+(b-1)^2}=\sqrt{(a-2)^2+(b+2)^2},$$

即

$$a-3b-3=0. \quad ②$$

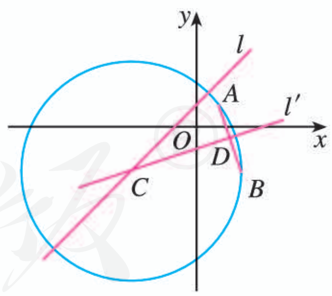


图 2.4-3

由①②可得 $a=-3$，$b=-2$. 所以圆心 C 的坐标是 $(-3,\ -2)$.

圆的半径

$$r=|AC|=\sqrt{(1+3)^2+(1+2)^2}=5.$$

所以，所求圆的标准方程是

$$(x+3)^2+(y+2)^2=25.$$

解法 2： 如图 2.4-3，设线段 AB 的中点为 D. 由 A，B 两点的坐标为 $(1,\ 1)$，$(2,\ -2)$，可得点 D 的坐标为 $\left(\frac{3}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$，直线 AB 的斜率为 $k_{AB}=\frac{-2-1}{2-1}=-3$.

因此，线段 AB 的垂直平分线 l' 的方程是 $y+\frac{1}{2}=\frac{1}{3}\left(x-\frac{3}{2}\right)$，即

$$x-3y-3=0.$$

由垂径定理可知，圆心 C 也在线段 AB 的垂直平分线上，所以它的坐标是方程组

$$\begin{cases}x-3y-3=0,\\ x-y+1=0\end{cases}$$

的解.

解这个方程组，得

$$\begin{cases}x=-3,\\ y=-2.\end{cases}$$

所以圆心 C 的坐标是 $(-3,\ -2)$.

圆的半径

$$r=|AC|=\sqrt{(1+3)^2+(1+2)^2}=5.$$

所以，所求圆的标准方程是

$$(x+3)^2+(y+2)^2=25.$$

练习

1. 写出下列圆的标准方程：

(1) 圆心为 $C(-3,\ 4)$，半径是 $\sqrt{5}$；

(2) 圆心为 $C(-8,\ 3)$，且经过点 $M(-5,\ -1)$.

2. 已知圆的标准方程是 $(x-3)^2+(y+2)^2=16$，借助计算工具计算，判断下列各点在圆上、圆外，还是在圆内.

(1) $M_1(4.30,\ -5.72)$； (2) $M_2(5.70,\ 1.08)$； (3) $M_3(3,\ -6)$.

3. 已知 $P_1(4,\ 9)$，$P_2(6,\ 3)$ 两点，求以线段 P_1P_2 为直径的圆的标准方程，并判断点 $M(6,\ 9)$，$N(3,\ 3)$，$Q(5,\ 3)$ 在圆上、圆内，还是在圆外.

4. 已知$\triangle AOB$ 的三个顶点分别是点 $A(4,\ 0)$，$O(0,\ 0)$，$B(0,\ 3)$，求$\triangle AOB$ 的外接圆的标准方程.

2.4.2 圆的一般方程

思考

我们知道，方程 $(x-1)^2+(y+2)^2=4$ 表示以 $(1,\ -2)$ 为圆心，2 为半径的圆. 可以将此方程变形为 $x^2+y^2-2x+4y+1=0$.

一般地，圆的标准方程 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 可以变形为

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0 \tag{2}$$

的形式. 反过来，形如(2)的方程一定能通过恒等变形变为圆的标准方程吗？

例如，对于方程 $x^2+y^2-2x-4y+6=0$，对其进行配方，得 $(x-1)^2+(y-2)^2=-1$，因为任意一个点的坐标 (x, y) 都不满足这个方程，所以这个方程不表示任何图形．所以，形如(2)的方程不一定能通过恒等变形变为圆的标准方程．这表明，形如(2)的方程不一定是圆的方程．

探究

方程 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 中的 D，E，F 满足什么条件时，这个方程表示圆？

将方程(2)的左边配方，并把常数项移到右边，得

$$\left(x+\frac{D}{2}\right)^2+\left(y+\frac{E}{2}\right)^2=\frac{D^2+E^2-4F}{4}. \qquad ①$$

(1) 当 $D^2+E^2-4F>0$ 时，比较方程①和圆的标准方程，可以看出方程(2)表示以 $\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$ 为圆心，$\frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}$ 为半径的圆；

(2) 当 $D^2+E^2-4F=0$ 时，方程(2)只有实数解 $x=-\frac{D}{2}$，$y=-\frac{E}{2}$，它表示一个点 $\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$；

(3) 当 $D^2+E^2-4F<0$ 时，方程(2)没有实数解，它不表示任何图形．

因此，当 $D^2+E^2-4F>0$ 时，方程(2)表示一个圆．我们把方程(2)叫做**圆的一般方程** (general equation of circle)．

思考

圆的标准方程与圆的一般方程各有什么特点？

例 4 求过三点 $O(0, 0)$，$M_1(1, 1)$，$M_2(4, 2)$ 的圆的方程，并求这个圆的圆心坐标和半径．

分析： 将点 O，M_1，M_2 的坐标分别代入圆的一般方程，可得一个三元一次方程组，解方程组即可求出圆的方程．

解： 设圆的方程是

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0. \qquad ①$$

因为 O，M_1，M_2 三点都在圆上，所以它们的坐标都是方程①的解．把它们的坐标依次代入方程①，得到关于 D，E，F 的一个三元一次方程组

$$\begin{cases} F=0, \\ D+E+F+2=0, \\ 4D+2E+F+20=0. \end{cases}$$

解这个方程组，得

$$\begin{cases}D=-8,\\E=6,\\F=0.\end{cases}$$

所以，所求圆的方程是

$$x^2+y^2-8x+6y=0.$$

由前面的讨论可知，所求圆的圆心坐标是 $(4,\ -3)$，半径 $r=\frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}=5$.

> ? 与例 2 的方法比较，你有什么体会？

求圆的方程常用待定系数法，其大致步骤是：

(1) 根据题意，选择标准方程或一般方程；

(2) 根据条件列出关于 a，b，r 或 D，E，F 的方程组；

(3) 解出 a，b，r 或 D，E，F，得到标准方程或一般方程.

例 5 已知线段 AB 的端点 B 的坐标是 $(4,\ 3)$，端点 A 在圆 $(x+1)^2+y^2=4$ 上运动，求线段 AB 的中点 M 的轨迹方程.

分析： 如图 2.4-4，点 A 运动引起点 M 运动，而点 A 在已知圆上运动，点 A 的坐标满足方程 $(x+1)^2+y^2=4$. 建立点 M 与点 A 坐标之间的关系，就可以利用点 A 的坐标所满足的关系式得到点 M 的坐标满足的关系式，求出点 M 的轨迹方程.

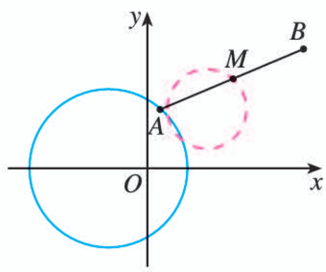


图 2.4-4

解： 设点 M 的坐标是 $(x,\ y)$，点 A 的坐标是 $(x_0,\ y_0)$. 由于点 B 的坐标是 $(4,\ 3)$，且 M 是线段 AB 的中点，所以

$$x=\frac{x_0+4}{2},\quad y=\frac{y_0+3}{2}.$$

于是有

$$x_0=2x-4,\quad y_0=2y-3. \qquad ①$$

因为点 A 在圆 $(x+1)^2+y^2=4$ 上运动，所以点 A 的坐标满足圆的方程，即

$$(x_0+1)^2+y_0^2=4. \qquad ②$$

把①代入②，得

$$(2x-4+1)^2+(2y-3)^2=4,$$

整理，得

> 点 M 的轨迹方程是指点 M 的坐标 $(x,\ y)$ 满足的关系式. 轨迹是指点在运动变化过程中形成的图形. 在解析几何中，我们常常把图形看作点的轨迹（集合）.

$$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=1.$$

这就是点 M 的轨迹方程，它表示以$\left(\frac{3}{2},\ \frac{3}{2}\right)$为圆心，半径为 1 的圆.

练习

1. 求下列各圆的圆心坐标和半径：

   (1) $x^2+y^2-6x=0$；　　(2) $x^2+y^2+2by=0$；

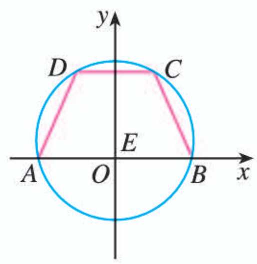
   (3) $x^2+y^2-2ax-2\sqrt{3}ay+3a^2=0$.

2. 判断下列方程分别表示什么图形，并说明理由：

   (1) $x^2+y^2=0$；　　(2) $x^2+y^2-2x+4y-6=0$；

   (3) $x^2+y^2+2ax-b^2=0$.

3. 如图，在四边形 $ABCD$ 中，$AB=6$，$CD=3$，且 $AB/\!/CD$，$AD=BC$，AB 与 CD 间的距离为 3. 求等腰梯形 $ABCD$ 的外接圆的方程，并求这个圆的圆心坐标和半径.



（第 3 题）

习题 2.4

复习巩固

1. 求下列各圆的圆心坐标和半径，并画出它们的图形：

   (1) $x^2+y^2-2x-5=0$；　　(2) $x^2+y^2+2x-4y-4=0$；

   (3) $x^2+y^2+2ax=0$；　　(4) $x^2+y^2-2by-2b^2=0$.

2. 求下列各圆的方程，并画出图形：

   (1) 圆心为点 $C(8,\ -3)$，且过点 $A(5,\ 1)$；

   (2) 过 $A(-1,\ 5)$，$B(5,\ 5)$，$C(6,\ -2)$ 三点.

3. 已知圆 C 经过原点和点 $A(2,\ 1)$，并且圆心在直线 l：$x-2y-1=0$ 上，求圆 C 的标准方程.

4. 圆 C 的圆心在 x 轴上，并且过 $A(-1,\ 1)$ 和 $B(1,\ 3)$ 两点，求圆 C 的方程.

综合运用

5. 已知圆的一条直径的端点分别是 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$，求证此圆的方程是

$$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0.$$

6. 平面直角坐标系中有 $A(0,\ 1)$，$B(2,\ 1)$，$C(3,\ 4)$，$D(-1,\ 2)$ 四点，这四点是否在同一个圆上？为什么？

7. 已知等腰三角形 ABC 的一个顶点为 $A(4,\ 2)$，底边的一个端点为 $B(3,\ 5)$，求底边的另一个端点 C 的轨迹方程，并说明它是什么图形.

8. 长为 $2a$ 的线段 AB 的两个端点 A 和 B 分别在 x 轴和 y 轴上滑动，求线段 AB 的中点的轨迹方程，并说明轨迹的形状.

拓广探索

9. 已知动点 M 与两个定点 $O(0, 0)$，$A(3, 0)$ 的距离的比为 $\frac{1}{2}$，求动点 M 的轨迹方程，并说明轨迹的形状.

10. 在平面直角坐标系中，如果点 P 的坐标 (x, y) 满足

$$\begin{cases} x=a+r\cos\theta, \\ y=b+r\sin\theta, \end{cases}$$

其中 θ 为参数. 证明：点 P 的轨迹是圆心为 (a, b)，半径为 r 的圆.

阅读与思考

坐标法与数学机械化

笛卡儿开创了解析几何思想方法的先河. 解析几何坐标法的形成、发展和完善，使几何问题的求解或求证能通过坐标转化为代数方程求解. 同时坐标法使计算机应用到几何定理的证明中成为可能.

明确提出机器可以成为推理工具的思想，要追溯到 17 世纪德国数学家莱布尼茨（Leibniz，1646—1716，微积分创始人之一）. 他受笛卡儿思想的启发，认为笛卡儿创立的解析几何，目的是将几何推理转化为计算. 遗憾的是，由于当时的条件限制，计算仅仅是手工操作（手摇计算机），无法进行大量复杂的计算，所以用机器实现几何定理证明的想法无法实现.

20 世纪以后，计算机迅速发展. 计算机的发明使一些数学家又开始探讨几何定理证明机械化的可能性. 1950 年，波兰数学家塔斯基得到一个引人注目的结论：一切初等几何范畴中的命题都可以用机械方法判定. 由于他的判定方法太复杂，在实践中没有太大的进展. 1959 年，美籍华裔数学家王浩（1921—1995）在这方面做出了鼓舞人心的工作，他在计算机上只用了 9 分钟就证明了《数学原理》（罗素和怀特海著）中的 350 多个命题，并第一次明确提出了“走向数学的机械化”的口号.

20 世纪 70 年代以后，我国著名数学家吴文俊在几何定理机器证明上作出了重大贡献，并创立了“吴方法”. 吴文俊是我国最具国际影响的数学家之一. 他在拓扑学、自动推理、机器证明、代数几何、中国数学史、对策论等研究领域均

有杰出的贡献. 曾获得首届国家最高科学技术奖（2000 年）、首届国家自然科学一等奖（1956 年）、首届求是杰出科学家奖（1994 年）、邵逸夫数学奖（2006 年）、国际自动推理最高奖——埃尔布朗自动推理杰出成就奖（1997 年）等. “文华逾九章，拓扑公式彪史册. 俊杰胜十书，机器证明誉寰球.”是对他一生工作的高度概括.

吴文俊（1919—2017），中国科学院院士，中国科学院数学与系统科学研究院研究员

吴文俊机器证明的思想，主要是从笛卡儿的坐标法和中国古代解方程的计算方法而来的. 他认为，欧氏几何体系的特点是纯粹在空间形式间推理，或说在图形之间，或者是把数量关系归之于空间形式，或者干脆排除数量关系. 另一个体系刚好与之相反，是把空间形式转化成数量关系来处理. 这种考虑方式就是中国的传统，早在 11 世纪左右就已产生，当时引进的概念叫天元、地元等，用现在的符号就相当于引进了 x，y 等. 用天元、地元表示某一个几何事实，那么几何对象之间的相互关系就表示成天元、地元之间的一种方程（即 x，y 之间的一种方程），即 17 世纪解析几何的坐标法.

吴文俊认为，欧氏几何体系是非机械化的，把空间形式数量化是机械化的. 吴文俊说：“我从事几何定理证明时，首先取适当的坐标，于是几何定理的假设与终结通常都成为多项式方程，称之为假设方程与终结方程. 满足定理假设的几何图象，就相当于假设方程组的一个解答或零点. 要证明定理成立，就是要证明假设方程的零点也使终结多项式为零.”由于计算机的发展与众多数学家（特别是以吴文俊为首的一批中国数学家）的努力，在 1976 年与 1977 年之交，几何定理机器证明的梦想终于实现了. 提出用计算机证明几何定理的“吴方法”，被认为是自动推理领域的先驱性工作. 进入 20 世纪 80 年代以后，吴文俊和他的同行把几何定理机器证明的方法发展成为数学机械化方法.

请你查阅有关资料，进一步了解吴文俊的事迹，了解我国数学家在数学机械化方面的卓越贡献.

2.5 直线与圆、圆与圆的位置关系

在平面几何中，我们研究过直线与圆这两类图形的位置关系. 前面我们学习了直线的方程、圆的方程，以及用方程研究两条直线的位置关系. 下面我们类比用方程研究两条直线位置关系的方法，利用直线和圆的方程，通过定量计算研究直线与圆、圆与圆的位置关系.

2.5.1 直线与圆的位置关系

我们知道，直线与圆有三种位置关系：

(1) 直线与圆相交，有两个公共点；

(2) 直线与圆相切，只有一个公共点；

(3) 直线与圆相离，没有公共点.

思考

在初中，我们怎样判断直线与圆的位置关系？根据上述定义，如何利用直线和圆的方程判断它们之间的位置关系？

下面，我们通过具体例子进行研究.

例 1 已知直线 l：$3x+y-6=0$ 和圆心为 C 的圆 $x^2+y^2-2y-4=0$，判断直线 l 与圆 C 的位置关系；如果相交，求直线 l 被圆 C 所截得的弦长.

分析： 思路 1：将判断直线 l 与圆 C 的位置关系转化为判断由它们的方程组成的方程组有无实数解、有几个实数解；若相交，可以由方程组解得两交点的坐标，利用两点间的距离公式求得弦长.

思路 2：依据圆心到直线的距离与半径的关系，判断直线与圆的位置关系；若相交，则可利用勾股定理求得弦长.

解法 1： 联立直线 l 与圆 C 的方程，得

$$\begin{cases}3x+y-6=0, & ①\\ x^2+y^2-2y-4=0. & ②\end{cases}$$

消去 y，得 $x^2-3x+2=0$，解得 $x_1=2$，$x_2=1$.

所以，直线 l 与圆 C 相交，有两个公共点.

把 $x_1=2$，$x_2=1$ 分别代入方程①，得 $y_1=0$，$y_2=3$.

所以，直线 l 与圆 C 的两个交点是 $A(2,0)$，$B(1,3)$.

因此 $|AB|=\sqrt{(1-2)^2+(3-0)^2}=\sqrt{10}$.

解法 2：圆 C 的方程 $x^2+y^2-2y-4=0$ 可化为 $x^2+(y-1)^2=5$，因此圆心 C 的坐标为 $(0,1)$，半径为 $\sqrt{5}$，圆心 $C(0,1)$ 到直线 l 的距离

$$d=\frac{|3\times0+1-6|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\frac{5}{\sqrt{10}}<\sqrt{5}.$$

所以，直线 l 与圆 C 相交，有两个公共点.

如图 2.5-1，由垂径定理，得 $|AB|=2\sqrt{r^2-d^2}=\sqrt{10}$.

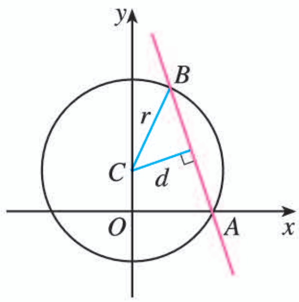


图 2.5-1

通过上述解法我们发现，在平面直角坐标系中，要判断直线 l：$Ax+By+C=0$ 与圆 C：$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 的位置关系，可以联立它们的方程，通过判定方程组

$$\begin{cases}Ax+By+C=0,\\(x-a)^2+(y-b)^2=r^2\end{cases}$$

的解的个数，得出直线与圆的公共点的个数，进而判断直线与圆的位置关系. 若相交，可以由方程组解得两交点坐标，利用两点间的距离公式求得弦长.

我们还可以根据圆的方程求得圆心坐标与半径 r，从而求得圆心到直线的距离 d，通过比较 d 与 r 的大小，判断直线与圆的位置关系. 若相交，则可利用勾股定理求得弦长.

适当地利用已知图形的几何性质，有助于简化计算.

思考

与初中的方法比较，你认为用方程判断直线与圆的位置关系有什么优点？例 1 中两种解法的差异是什么？

例 2 过点 $P(2,1)$ 作圆 O：$x^2+y^2=1$ 的切线 l，求切线 l 的方程.

分析：如图 2.5-2，容易知道，点 $P(2,1)$ 位于圆 O：$x^2+y^2=1$ 外，经过圆外一点有两条直线与这个圆相切. 我们设切线方程为 $y-1=k(x-2)$，k 为斜率. 由直线与圆相切可求出 k 的值.

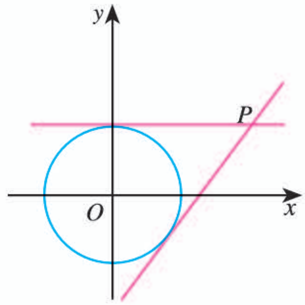


图 2.5-2

解法 1：设切线 l 的斜率为 k，则切线 l 的方程为 $y-1=k(x-2)$，即 $kx-y+1-2k=0$.

由圆心（0，0）到切线 l 的距离等于圆的半径 1，得

$$\frac{|1-2k|}{\sqrt{k^2+1}}=1,$$

解得 $k=0$ 或 $\frac{4}{3}$.

因此，所求切线 l 的方程为 $y=1$，或 $4x-3y-5=0$.

解法 2：设切线 l 的斜率为 k，则切线 l 的方程为 $y-1=k(x-2)$.

因为直线 l 与圆相切，所以方程组

$$\begin{cases} y-1=k(x-2), \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

只有一组解.

消元，得

$$(k^2+1)x^2+(2k-4k^2)x+4k^2-4k=0. \quad ①$$

因为方程①只有一个解，所以

$$\Delta=4k^2(1-2k)^2-16k(k^2+1)(k-1)=0,$$

解得 $k=0$ 或 $\frac{4}{3}$.

所以，所求切线 l 的方程为 $y=1$，或 $4x-3y-5=0$.

练习

1. 判断下列各组直线 l 与圆 C 的位置关系：
   (1) l：$x-y+1=0$，　　圆 C：$x^2+y^2=3$；
   (2) l：$3x+4y+2=0$，　　圆 C：$x^2+y^2-2x=0$；
   (3) l：$x+y+3=0$，　　圆 C：$x^2+y^2+2y=0$.
2. 已知直线 $4x+3y-35=0$ 与圆心在原点的圆 C 相切，求圆 C 的方程.
3. 判断直线 $2x-y+2=0$ 与圆 $(x-1)^2+(y-2)^2=4$ 的位置关系；如果相交，求直线被圆截得的弦长.

例 3　图 2.5-3 是某圆拱形桥一孔圆拱的示意图. 圆拱跨度 $AB=20$ m，拱高 $OP=4$ m，建造时每间隔 4 m 需要用一根支柱支撑，求支柱 A_2P_2 的高度（精确到 0.01 m）.

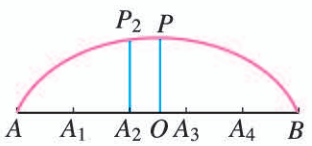


图 2.5-3

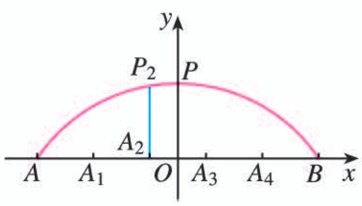


图 2.5-4

分析：建立如图 2.5-4 所示的直角坐标系，要得到支柱 A_2P_2 的高度，只需求出点 P_2 的纵坐标.

解：建立如图 2.5-4 所示的直角坐标系，使线段 AB 所在直线为 x 轴，O 为坐标原点，圆心在 y 轴上. 由题意，点 P，B 的坐标分别为 $(0, 4)$，$(10, 0)$. 设圆心坐标是 $(0, b)$，圆的半径是 r，那么圆的方程是

$$x^2+(y-b)^2=r^2.$$

> ？点 O 是圆拱所在圆的圆心吗？

下面确定 b 和 r 的值.

因为 P，B 两点都在圆上，所以它们的坐标 $(0, 4)$，$(10, 0)$ 都满足方程 $x^2+(y-b)^2=r^2$. 于是，得到方程组

$$\begin{cases}0^2+(4-b)^2=r^2,\\10^2+(0-b)^2=r^2.\end{cases}$$

解得

$$b=-10.5,\ r^2=14.5^2.$$

所以，圆的方程是

$$x^2+(y+10.5)^2=14.5^2.$$

把点 P_2 的横坐标 $x=-2$ 代入圆的方程，得

$$(-2)^2+(y+10.5)^2=14.5^2,$$

即 $y+10.5=\sqrt{14.5^2-(-2)^2}$（$P_2$ 的纵坐标 $y>0$，平方根取正值）. 所以

$$y=\sqrt{14.5^2-(-2)^2}-10.5\approx 14.36-10.5=3.86\ (\text{m}).$$

答：支柱 A_2P_2 的高度约为 3.86 m.

思考

如果不建立平面直角坐标系，你能解决这个问题吗？由此比较综合法和坐标法的特点.

例 4 一个小岛的周围有环岛暗礁，暗礁分布在以小岛中心为圆心，半径为 20 km 的圆形区域内. 已知小岛中心位于轮船正西 40 km 处，港口位于小岛中心正北 30 km 处. 如果轮船沿直线返港，那么它是否会有触礁危险？

分析：先画出示意图，了解小岛中心、轮船、港口的方位和距离. 如图 2.5-5，根据题意，建立适当的平面直角坐标系，求出暗礁所在区域的边缘圆的方程，以及轮船返港直线的方程，利用方程判断直线与圆的位置关系，进而确定轮船是否有触礁危险.

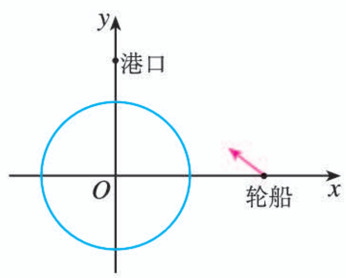


图 2.5-5

解：以小岛的中心为原点 O，东西方向为 x 轴，建立

如图 2.5-5 所示的直角坐标系. 为了运算的简便，我们取 10 km 为单位长度，则港口所在位置的坐标为 (0，3)，轮船所在位置的坐标为 (4，0).

这样，受暗礁影响的圆形区域的边缘所对应的圆的方程为

$$x^2+y^2=4;$$

轮船航线所在直线 l 的方程为

$$\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1，即 3x+4y-12=0.$$

联立直线 l 与圆 O 的方程，得

$$\begin{cases}3x+4y-12=0,\\ x^2+y^2=4.\end{cases}$$

消去 y，得

$$25x^2-72x+80=0.$$

由 $\Delta=(-72)^2-4\times25\times80<0$，可知方程组无解.

所以直线 l 与圆 O 相离，轮船沿直线返港不会有触礁危险.

思考

你还能用其他方法解决上述问题吗?

用坐标法解决几何问题时，先用坐标和方程表示相应的几何元素：点、直线、圆，将几何问题转化为代数问题；然后通过代数运算解决代数问题；最后解释代数运算结果的几何含义，得到几何问题的结论. 这就是用坐标法解决平面几何问题的“三步曲”：

第一步：建立适当的平面直角坐标系，用坐标和方程表示问题中的几何要素，如点、直线、圆，把平面几何问题转化为代数问题；

第二步：通过代数运算，解决代数问题；

第三步：把代数运算的结果“翻译”成几何结论.

> ? 比较坐标法与向量法，它们在解决几何问题时，有什么异同点?

练习

1. 赵州桥的跨度是 37.4 m，圆拱高约为 7.2 m. 求这座圆拱桥的拱圆的方程.
2. 某圆拱桥的水面跨度 20 m，拱高 4 m. 现有一船，宽 10 m，水面以上高 3 m，这条船能否从桥下通过?
3. 在一个平面上，机器人从与点 $C(5，-3)$ 的距离为 9 的地方绕点 C 顺时针而行，在行进过程中保持与点 C 的距离不变. 它在行进过程中到过点 $A(-10，0)$ 与 $B(0，12)$ 的直线的最近距离和最远距离分别是多少?

(第 1 题)

2.5.2 圆与圆的位置关系

前面我们运用直线的方程、圆的方程，研究了直线与圆的位置关系．现在我们类比上述研究方法，运用圆的方程，通过定量计算研究圆与圆的位置关系．

我们知道，两个圆之间存在以下三种位置关系：

（1）两圆相交，有两个公共点；

（2）两圆相切，包括外切与内切，只有一个公共点；

（3）两圆相离，包括外离与内含，没有公共点．

思考

类比运用直线和圆的方程，研究直线与圆的位置关系的方法，如何利用圆的方程，判断它们之间的位置关系？

例 5 已知圆 C_1：$x^2+y^2+2x+8y-8=0$，圆 C_2：$x^2+y^2-4x-4y-2=0$，试判断圆 C_1 与圆 C_2 的位置关系．

分析： 思路 1：圆 C_1 与圆 C_2 的位置关系由它们有几个公共点确定，而它们有几个公共点又由它们的方程所组成的方程组有几组实数解确定；

思路 2：借助图形，可以依据圆心距与两半径的和 r_1+r_2 或两半径的差的绝对值 $|r_1-r_2|$ 的大小关系，判断两圆的位置关系．

解法 1： 将圆 C_1 与圆 C_2 的方程联立，得到方程组

$$\begin{cases} x^2+y^2+2x+8y-8=0, & ① \\ x^2+y^2-4x-4y-2=0. & ② \end{cases}$$

①－②，得

$$x+2y-1=0, \qquad ③$$

由③，得

$$y=\frac{1-x}{2}.$$

把上式代入①，并整理，得

$$x^2-2x-3=0. \qquad ④$$

方程④的根的判别式

$$\Delta=(-2)^2-4\times1\times(-3)=16>0,$$

所以，方程④有两个不相等的实数根 x_1，x_2．把 x_1，x_2 分别代入方程③，得到 y_1，y_2．

因此圆 C_1 与圆 C_2 有两个公共点 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，这两个圆相交．

> ？
>
> 画出圆 C_1 与圆 C_2 以及方程③表示的直线，你发现了什么？你能说明为什么吗？

> 本题只要判断圆 C_1 与圆 C_2 是否有公共点，并不需求出公共点的坐标，因此不必解方程④，具体求出两个实数根．

解法 2：把圆 C_1 的方程化成标准方程，得

$$(x+1)^2+(y+4)^2=25,$$

圆 C_1 的圆心是 $(-1,\ -4)$，半径 $r_1=5$.

把圆 C_2 的方程化成标准方程，得

$$(x-2)^2+(y-2)^2=10,$$

圆 C_2 的圆心是 $(2,\ 2)$，半径 $r_2=\sqrt{10}$.

圆 C_1 与圆 C_2 的圆心距为

$$\sqrt{(-1-2)^2+(-4-2)^2}=3\sqrt{5}.$$

圆 C_1 与圆 C_2 的两半径之和 $r_1+r_2=5+\sqrt{10}$，两半径长之差 $r_1-r_2=5-\sqrt{10}$.

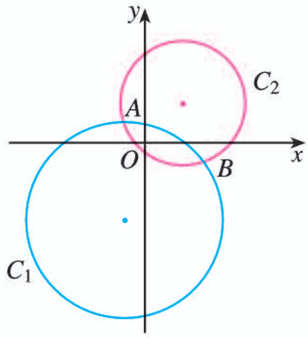


图 2.5-6

因为 $5-\sqrt{10}<3\sqrt{5}<5+\sqrt{10}$，即 $r_1-r_2<3\sqrt{5}<r_1+r_2$，所以圆 C_1 与圆 C_2 相交（图 2.5-6），它们有两个公共点 A，B.

思考

在解法 1 中，如果两圆方程联立消元后得到的方程的 $\Delta=0$，它说明什么？你能据此确定两圆是内切还是外切吗？如何判断两圆是内切还是外切呢？

当 $\Delta<0$ 时，两圆是什么位置关系？

例 6　已知圆 O 的直径 $AB=4$，动点 M 与点 A 的距离是它与点 B 的距离的 $\sqrt{2}$ 倍. 试探究点 M 的轨迹，并判断该轨迹与圆 O 的位置关系.

分析：我们可以通过建立适当的平面直角坐标系，求得满足条件的动点 M 的轨迹方程，从而得到点 M 的轨迹；通过研究它的轨迹方程与圆 O 方程的关系，判断这个轨迹与圆 O 的位置关系.

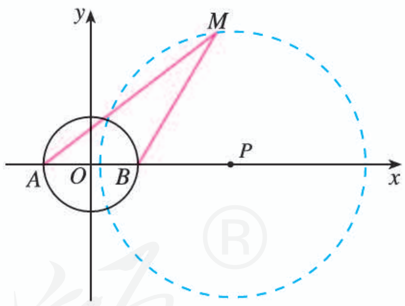


图 2.5-7

解：如图 2.5-7，以线段 AB 的中点 O 为原点，AB 所在直线为 x 轴，线段 AB 的垂直平分线为 y 轴，建立平面直角坐标系. 由 $AB=4$，得 $A(-2,\ 0)$，$B(2,\ 0)$.

设点 M 的坐标为 $(x,\ y)$，由 $|MA|=\sqrt{2}\,|MB|$，得

$$\sqrt{(x+2)^2+y^2}=\sqrt{2}\times\sqrt{(x-2)^2+y^2},$$

化简，得 $x^2-12x+y^2+4=0$，即 $(x-6)^2+y^2=32$.

所以点 M 的轨迹是以 $P(6,\ 0)$ 为圆心，半径为 $4\sqrt{2}$ 的一个圆（图 2.5-7）.

> ?
>
> 如果把本例中的“$\sqrt{2}$ 倍”改为“$k\ (k>0)$ 倍”，你能分析并解决这个问题吗？

因为两圆的圆心距为 $|PO|=6$，两圆的半径分别为 $r_1=2$，$r_2=4\sqrt{2}$，又 $r_2-r_1<|PO|<r_2+r_1$，所以点 M 的轨迹与圆 O 相交.

练习

1. 已知圆 C_1：$x^2+y^2=4$，圆 C_2：$x^2+y^2-8x-6y+16=0$，判断圆 C_1 与圆 C_2 的位置关系.
2. 已知圆 C_1：$x^2+y^2+2x+3y+1=0$，圆 C_2：$x^2+y^2+4x+3y+2=0$，证明圆 C_1 与圆 C_2 相交，并求圆 C_1 与圆 C_2 的公共弦所在直线的方程.

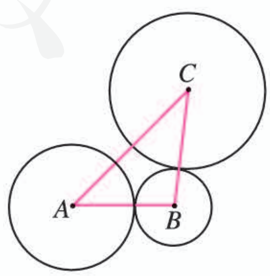
习题 2.5

复习巩固

1. 判断直线 $4x-3y=50$ 与圆 $x^2+y^2=100$ 的位置关系. 如果有公共点，求出公共点的坐标.
2. 求下列条件确定的圆的方程，并画出它们的图形：
   (1) 圆心为 $M(3，-5)$，且与直线 $x-7y+2=0$ 相切；
   (2) 圆心在直线 $y=x$ 上，半径为 2，且与直线 $y=6$ 相切；
   (3) 半径为$\sqrt{13}$，且与直线 $2x-3y+6=0$ 相切于点 $(3，4)$.
3. 求直线 l：$3x-y-6=0$ 被圆 C：$x^2+y^2-2x-4y=0$ 截得的弦 AB 的长.
4. 求圆心在直线 $3x-y=0$ 上，与 x 轴相切，且被直线 $x-y=0$ 截得的弦长为 $2\sqrt{7}$ 的圆的方程.
5. 求与圆 C：$x^2+y^2-x+2y=0$ 关于直线 l：$x-y+1=0$ 对称的圆的方程.
6. 正方形 $ABCD$ 的边长为 a，在边 BC 上取线段 $BE=\frac{a}{3}$，在边 DC 的延长线上取 $CF=\frac{a}{2}$. 试证明：直线 AE 与 BF 的交点 M 位于正方形 $ABCD$ 的外接圆上.
7. 求经过点 $M(2，-2)$ 以及圆 $x^2+y^2-6x=0$ 与 $x^2+y^2=4$ 交点的圆的方程.

综合运用

8. 求圆心在直线 $x-y-4=0$ 上，并且经过圆 $x^2+y^2+6x-4=0$ 与圆 $x^2+y^2+6y-28=0$ 的交点的圆的方程.
9. 求圆 $x^2+y^2-4=0$ 与圆 $x^2+y^2-4x+4y-12=0$ 的公共弦的长.
10. 求经过点 $M(3，-1)$，且与圆 C：$x^2+y^2+2x-6y+5=0$ 相切于点 $N(1，2)$ 的圆的方程.
11. 如图，某台机器的三个齿轮，A 与 B 啮合，C 与 B 也啮合. 若 A 轮的直径为 200 cm，B 轮的直径为 120 cm，C 轮的直径为 250 cm，且 $\angle A=45°$. 试建立适当的坐标系，用坐标法求出 A，C 两齿轮的中心距离（精确到 1 cm).



（第 11 题）

12. 已知 $A(-2，-2)$，$B(-2，6)$，$C(4，-2)$ 三点，点 P 在圆 $x^2+y^2=4$ 上运动，求 $|PA|^2+|PB|^2+|PC|^2$ 的最大值和最小值.

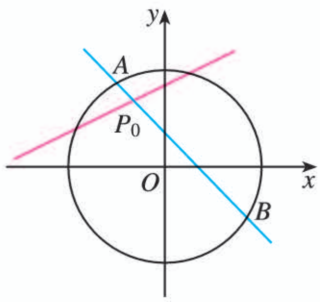
拓广探索

13. 已知圆 $x^2+y^2=4$，直线 l：$y=x+b$. b 为何值时，圆上恰有三个点到直线 l 的距离都等于 1?

14. 如图，圆 $x^2+y^2=8$ 内有一点 $P_0(-1, 2)$，AB 为过点 P_0 且倾斜角为 α 的弦.

(1) 当 $\alpha=135°$时，求 AB 的长.

(2) 是否存在弦 AB 被点 P_0 平分? 若存在，写出直线 AB 的方程；若不存在，请说明理由.



(第 14 题)

15. 已知点 $P(-2, -3)$ 和以点 Q 为圆心的圆 $(x-4)^2+(y-2)^2=9$.

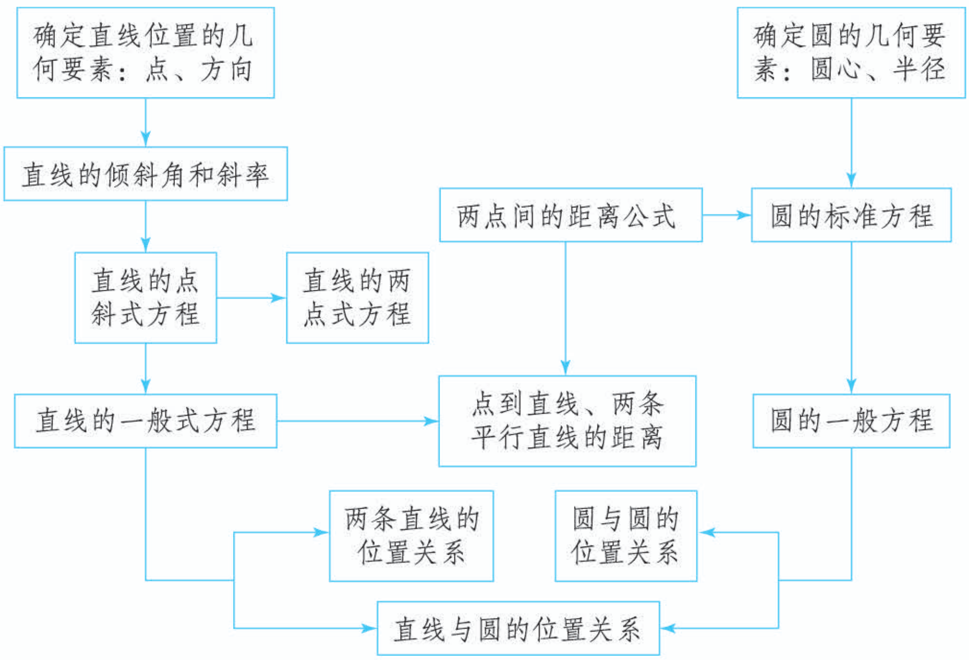
(1) 画出以 PQ 为直径，点 Q'为圆心的圆，再求出圆 Q'的方程；

(2) 设圆 Q 与圆 Q'相交于 A，B 两点，直线 PA，PB 是圆 Q 的切线吗? 为什么?

(3) 求直线 AB 的方程.

小结

一、本章知识结构



二、回顾与思考

本章在平面直角坐标系中探究确定直线、圆的几何要素，并利用坐标表示这些几何要素，进而得到直线、圆上的点的坐标所满足的关系式，建立直线的方程、圆的方程；通过它们的方程，用代数方法研究有关几何问题，包括两条直线的位置关系，特别是两条直线的平行与垂直，两条直线的交点坐标，各种距离问题，以及直线与圆、圆与圆的位置关系等．在研究和解决这些问题的过程中，我们可以不断体会解析几何的基本思想方法——坐标法．

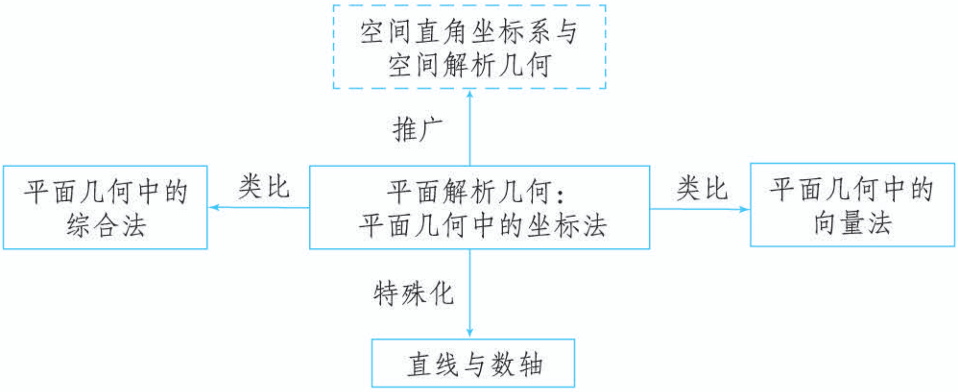
坐标法是研究和解决几何问题的重要方法，它建立了几何与代数间的联系，体现了数形结合的思想方法．用坐标法解决平面几何问题的“三步曲”是：

第一步：建立适当的平面直角坐标系，用坐标和方程表示问题中的几何要素，把平面几何问题转化为代数问题；

第二步：通过代数运算，解决代数问题；

第三步：把代数运算的结果“翻译”成几何结论．

坐标法、综合法、向量法都是研究平面图形的重要方法．这些方法可以推广到空间中．



请你带着下面的问题，复习一下全章内容吧！

1. 在直角坐标系中，我们是如何探索确定直线位置的几何要素的？它与平面几何中确定直线位置的几何要素有什么差异？

2. 直线的倾斜程度、倾斜角、斜率三者之间有什么关系？如何用直线上两点的坐标表示这条直线的斜率？直线的方向向量在刻画直线的倾斜角、斜率方面有什么作用？

3. 你能叙述直线点斜式方程的建立过程吗？

4. 写出直线的点斜式、斜截式、两点式、截距式方程，并指出这些方程中字母系数的几何意义. 有人说，直线方程的其他形式都是点斜式方程的“推论”，对此你有什么看法？

5. 你能写出两点间距离公式、点到直线的距离公式吗？比较用坐标法和向量法推导点到直线的距离公式的过程，你有何体会？

6. 圆的方程有哪几种形式？你能说出它们各自的特点吗？

7. 位置关系是图形间的一种重要关系. 直线与直线、直线与圆、圆与圆各有哪些位置关系？我们是如何通过方程来研究这些位置关系的？你能说说用方程研究图形位置关系的基本思路与具体步骤吗？

8. 坐标法是研究和解决平面几何问题的重要方法. 你能举例说明用坐标法解决平面几何问题“三步曲”中的第一步、第二步和第三步的具体含义吗？

9. 数形结合是重要的数学思想方法. 坐标系把图形性质与代数运算有机结合起来，由此产生了解析几何这门学科. 我们常说，两点间的距离公式是勾股定理的坐标表示. 用“数”表示“形”，用“形”解释“数”，在解析几何的学习中经常遇到，你还能举出这方面的一些例子吗？

复习参考题 2

复习巩固

1. 选择题.

(1) 直线 $3x+2y-1=0$ 的一个方向向量是（　　）.

(A) (2, −3)　(B) (2, 3)　(C) (−3, 2)　(D) (3, 2)

(2) 设直线 l 的方程为 $x-y\sin\theta+2=0$，则直线 l 的倾斜角 α 的范围是（　　）.

(A) $[0, \pi]$　(B) $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$　(C) $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$　(D) $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$

(3) 与直线 $3x-4y+5=0$ 关于 x 轴对称的直线的方程为（　　）.

(A) $3x+4y-5=0$　(B) $3x+4y+5=0$

(C) $3x-4y+5=0$　(D) $3x-4y-5=0$

2. 已知下列各组中的两个方程表示的直线平行，求 a 的值：

(1) $2x+3y=a$,　$4x+6y-3=0$;

(2) $x+2ay-1=0$,　$(3a-1)x-ay-1=0$;

(3) $x+(1+a)y=2-a$,　$2ax+4y=-16$.

3. 已知下列各组中的两个方程表示的直线垂直，求 a 的值：

(1) $4ax+y=1$,　$(1-a)x+y=-1$;

(2) $2x+ay=2$,　$ax+2y=1$;

(3) $(3a+2)x+(1-4a)y+8=0$,　$(5a-2)x+(a+4)y-7=0$.

4. 求平行于直线 $x-y-2=0$，且与它的距离为 $2\sqrt{2}$ 的直线的方程.

5. 已知平行四边形的两条边所在直线的方程分别是 $x+y-1=0$，$3x-y+4=0$，且它的对角线的交点是 $M(3, 3)$，求这个平行四边形其他两边所在直线的方程.

6. 求下列各圆的方程：

(1) 圆心为 $M(-5, 3)$，且过点 $A(-8, -1)$；

(2) 过 $A(-2, 4)$，$B(-1, 3)$，$C(2, 6)$ 三点；

(3) 圆心在直线 $3x+y-5=0$ 上，且经过原点和点 $(3, -1)$.

7. m 为何值时，方程 $x^2+y^2-4x+2my+2m^2-2m+1=0$ 表示圆？并求半径最大时圆的方程.

8. 判断圆 $x^2+y^2-6x+4y+12=0$ 与圆 $x^2+y^2-14x-2y+14=0$ 是否相切.

综合运用

9. 若函数 $y=f(x)$ 在 $x=a$ 及 $x=b$ 之间的一段图象可以近似地看作线段，且 $a\leqslant c\leqslant b$，求证：

$$f(c)\approx f(a)+\frac{c-a}{b-a}[f(b)-f(a)].$$

10. 求点 $P(-2, -1)$ 到直线 l：$(1+3\lambda)x+(1+\lambda)y-2-4\lambda=0$（$\lambda$ 为任意实数）的距离的最大值.

11. 过点 $P(3, 0)$ 有一条直线 l，它夹在两条直线 l_1：$2x-y-2=0$ 与 l_2：$x+y+3=0$ 之间的线段恰被点 P 平分，求直线 l 的方程.

12. 已知直线 l：$x-2y-8=0$ 和 $A(-2,\ 0)$，$B(2,\ 4)$ 两点，若直线 l 上存在点 P 使得 $|PA|+|PB|$ 最小，求点 P 的坐标.

13. 求圆 $x^2+y^2-10x-10y=0$ 与圆 $x^2+y^2-6x+2y-40=0$ 的公共弦长.

14. 已知圆 $x^2+y^2=4$ 与圆 $x^2+y^2+4x-4y+4=0$ 关于直线 l 对称，求直线 l 的方程.

15. 求与圆 C：$(x+2)^2+(y-6)^2=1$ 关于直线 $3x-4y+5=0$ 对称的圆的方程.

16. 求圆心在直线 $y=-2x$ 上，并且经过点 $A(2,\ -1)$，与直线 $x+y=1$ 相切的圆的方程.

拓广探索

17. 如果四边形一组对边的平方和等于另一组对边的平方和，那么它的对角线具有什么关系？为什么？

18. 求由曲线 $x^2+y^2=|x|+|y|$ 围成的图形的面积.

19. 一条光线从点 $A(-2,\ 3)$ 射出，经 x 轴反射后，与圆 C：$(x-3)^2+(y-2)^2=1$ 相切，求反射后光线所在直线的方程.

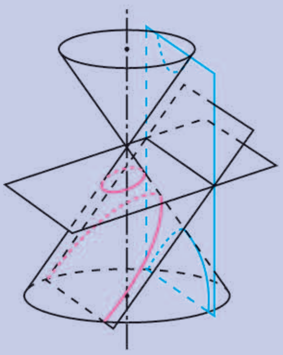
20. 已知圆 C：$(x-1)^2+(y-2)^2=25$，直线 l：$(2m+1)x+(m+1)y-7m-4=0$.

    (1) 求证：直线 l 恒过定点.

    (2) 直线 l 被圆 C 截得的弦何时最长、何时最短？并求截得的弦长最短时 m 的值以及最短弦长.

第三章

圆锥曲线的方程



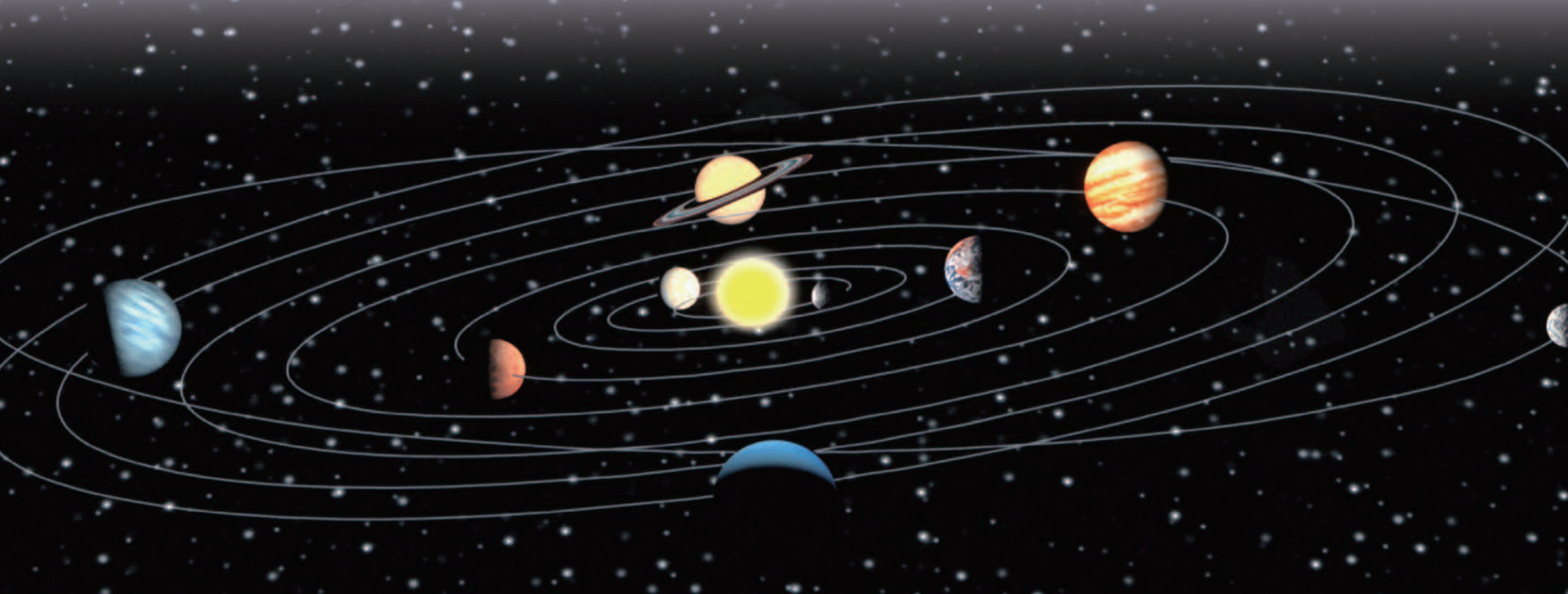
我们知道，用一个垂直于圆锥的轴的平面截圆锥，截口曲线（截面与圆锥侧面的交线）是一个圆．如果改变圆锥的轴与截平面所成的角，那么会得到怎样的曲线呢？

如图，用一个不垂直于圆锥的轴的平面截圆锥，当圆锥的轴与截面所成的角不同时，可以得到不同的截口曲线，它们分别是椭圆、抛物线和双曲线．我们通常把椭圆、抛物线、双曲线统称为**圆锥曲线**（conic sections）．

圆锥曲线与科研、生产以及人类生活有着紧密的关系．如行星绕太阳运行的轨道是椭圆，发电厂冷却塔的外形线是双曲线，探照灯反射镜面、卫星接收天线是抛物线绕其对称轴旋转所成的抛物面……为什么圆锥曲线有如此广泛的应用呢？我们可以从它们的几何特征及其性质中找到答案．

圆锥曲线的发现与研究始于古希腊．当时人们用纯几何的方法研究这些与圆密切相关的曲线，它们的几何性质是圆的几何性质的自然推广．17 世纪，笛卡儿发明了坐标系，人们开始借助坐标系，运用代数方法研究圆锥曲线．

本章我们继续采用坐标法，在探究圆锥曲线几何特征的基础上，建立它们的方程，通过方程研究它们的性质，并解决与圆锥曲线有关的几何问题和实际问题，进一步感受数形结合的思想方法，体会坐标法的魅力与威力．



3.1 椭圆

椭圆是圆锥曲线的一种，具有丰富的几何性质，在科研、生产和人类生活中具有广泛的应用．那么，椭圆到底有怎样的几何特征？我们该如何利用这些特征建立椭圆的方程，从而为研究椭圆的几何性质奠定基础？

3.1.1 椭圆及其标准方程

探究

取一条定长的细绳，把它的两端都固定在图板的同一点，套上铅笔，拉紧绳子，移动笔尖，这时笔尖（动点）画出的轨迹是一个圆．如果把细绳的两端拉开一段距离，分别固定在图板的两点 F_1，F_2（图 3.1-1），套上铅笔，拉紧绳子，移动笔尖，画出的轨迹是什么曲线？

在这一过程中，移动的笔尖（动点）满足的几何条件是什么？

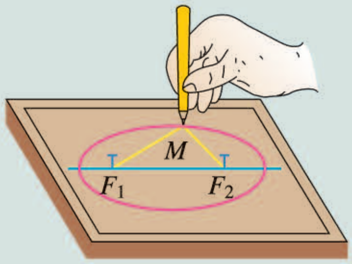


图 3.1-1

把细绳的两端拉开一段距离，笔尖移动的过程中，细绳的长度保持不变，即笔尖到两个定点的距离的和等于常数．

我们把平面内与两个定点 F_1，F_2 的距离的和等于常数（大于 $|F_1F_2|$）的点的轨迹叫做**椭圆**（ellipse）．这两个定点叫做椭圆的**焦点**（focus），两焦点间的距离叫做椭圆的**焦距**（focus distance），焦距的一半称为半焦距．

由椭圆的定义可知，上述移动的笔尖（动点）画出的轨迹是椭圆．

下面我们根据椭圆的几何特征，选择适当的坐标系，建立椭圆的方程．

思考

观察椭圆的形状，你认为怎样建立坐标系可能使所得的椭圆方程形式简单？

观察我们画出的图形，可以发现椭圆具有对称性，而且过两个焦点的直线是它的对称

轴，所以我们以经过椭圆两焦点 F_1，F_2 的直线为 x 轴，线段 F_1F_2 的垂直平分线为 y 轴，建立平面直角坐标系 Oxy，如图 3.1-2 所示.

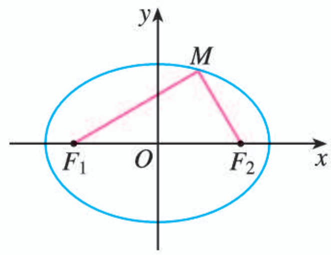


图 3.1-2

设 $M(x, y)$ 是椭圆上任意一点，椭圆的焦距为 $2c(c>0)$，那么焦点 F_1，F_2 的坐标分别为 $(-c, 0)$，$(c, 0)$. 根据椭圆的定义，设点 M 与焦点 F_1，F_2 的距离的和等于 $2a$.

设为 $2a$ 能为问题的研究带来方便.

由椭圆的定义可知，椭圆可看作点集

$$P=\{M \mid |MF_1|+|MF_2|=2a\}.$$

因为

$$|MF_1|=\sqrt{(x+c)^2+y^2}, \quad |MF_2|=\sqrt{(x-c)^2+y^2},$$

所以

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a. \qquad ①$$

为了化简方程①，我们将其左边的一个根式移到右边，得

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}. \qquad ②$$

对方程②两边平方，得

$$(x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2.$$

整理，得

$$a^2-cx=a\sqrt{(x-c)^2+y^2}. \qquad ③$$

对方程③两边平方，得

$$a^4-2a^2cx+c^2x^2=a^2x^2-2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2.$$

整理，得

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2). \qquad ④$$

将方程④两边同除以 $a^2(a^2-c^2)$，得

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1. \qquad ⑤$$

由椭圆的定义可知，$2a>2c>0$，即 $a>c>0$，所以 $a^2-c^2>0$.

思考

观察图 3.1-3，你能从中找出表示 a，c，$\sqrt{a^2-c^2}$ 的线段吗？

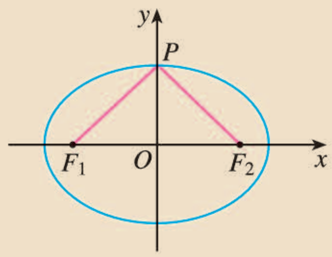


图 3.1-3

由图 3.1-3 可知，$|PF_1|=|PF_2|=a$，$|OF_1|=|OF_2|=c$，$|PO|=\sqrt{a^2-c^2}$．令 $b=|PO|=\sqrt{a^2-c^2}$，那么方程⑤就是

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0). \tag{⑥}$$

由于方程②③的两边都是非负实数，因此方程①到方程⑥的变形都是同解变形．这样，椭圆上任意一点的坐标 (x, y) 都满足方程⑥；反之，以方程⑥的解为坐标的点 (x, y) 与椭圆的两个焦点 $(c, 0)$，$(-c, 0)$ 的距离之和为 $2a$，即以方程⑥的解为坐标的点都在椭圆上．我们称方程⑥是椭圆的方程，这个方程叫做**椭圆的标准方程**．它表示焦点在 x 轴上，两个焦点分别是 $F_1(-c, 0)$，$F_2(c, 0)$ 的椭圆，这里 $c^2=a^2-b^2$．

思考

如图 3.1-4，如果焦点 F_1，F_2 在 y 轴上，且 F_1，F_2 的坐标分别为 $(0, -c)$，$(0, c)$，a，b 的意义同上，那么椭圆的方程是什么？

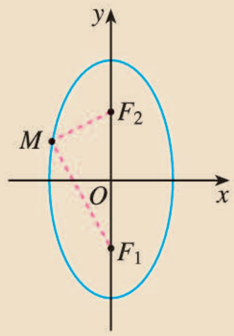


图 3.1-4

容易知道，此时椭圆的方程是

$$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1\ (a>b>0),$$

这个方程也是椭圆的标准方程．

例 1　已知椭圆的两个焦点坐标分别是 $(-2, 0)$，$(2, 0)$，并且经过点 $\left(\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}\right)$，求它的标准方程．

解：由于椭圆的焦点在 x 轴上，所以设它的标准方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$．

由椭圆的定义知 $c=2$，

$$2a=\sqrt{\left(\frac{5}{2}+2\right)^2+\left(-\frac{3}{2}\right)^2}+\sqrt{\left(\frac{5}{2}-2\right)^2+\left(-\frac{3}{2}\right)^2}=2\sqrt{10},$$

所以 $a=\sqrt{10}$．

所以 $b^2=a^2-c^2=10-4=6$．

所以，所求椭圆的标准方程为

$$\frac{x^2}{10}+\frac{y^2}{6}=1.$$

你还能用其他方法求它的标准方程吗？试比较不同方法的特点．

例 2 如图 3.1-5，在圆 $x^2+y^2=4$ 上任取一点 P，过点 P 作 x 轴的垂线段 PD，D 为垂足. 当点 P 在圆上运动时，线段 PD 的中点 M 的轨迹是什么？为什么？（当点 P 经过圆与 x 轴的交点时，规定点 M 与点 P 重合.）

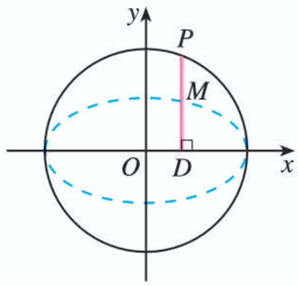


图 3.1-5

分析： 点 P 在圆 $x^2+y^2=4$ 上运动，点 P 的运动引起点 M 运动. 我们可以由 M 为线段 PD 的中点得到点 M 与点 P 坐标之间的关系式，并由点 P 的坐标满足圆的方程得到点 M 的坐标所满足的方程.

解： 设点 M 的坐标为 (x, y)，点 P 的坐标为 (x_0, y_0)，则点 D 的坐标为 $(x_0, 0)$. 由点 M 是线段 PD 的中点，得

$$x=x_0,\ y=\frac{y_0}{2}.$$

因为点 $P(x_0, y_0)$ 在圆 $x^2+y^2=4$ 上，所以

$$x_0{}^2+y_0{}^2=4. \quad ①$$

把 $x_0=x$，$y_0=2y$ 代入方程①，得

$$x^2+4y^2=4,$$

即

$$\frac{x^2}{4}+y^2=1.$$

所以点 M 的轨迹是椭圆.

> 寻求点 M 的坐标 (x, y) 中 x，y 与 x_0，y_0 之间的关系，然后消去 x_0，y_0，得到点 M 的轨迹方程. 这是解析几何中求点的轨迹方程常用的方法.
>
> 利用信息技术，可以更方便地探究点 M 的轨迹的形状.

思考

由例 2 我们发现，可以由圆通过“压缩”得到椭圆. 你能由圆通过“拉伸”得到椭圆吗？如何“拉伸”？由此你能发现椭圆与圆之间的关系吗？

例 3 如图 3.1-6，设 A，B 两点的坐标分别为 $(-5, 0)$，$(5, 0)$. 直线 AM，BM 相交于点 M，且它们的斜率之积是 $-\frac{4}{9}$，求点 M 的轨迹方程.

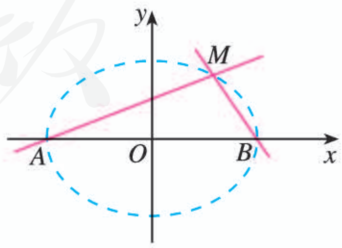


图 3.1-6

分析： 设点 M 的坐标为 (x, y)，那么直线 AM，BM 的斜率就可用含 x，y 的关系式分别表示. 由直线 AM，BM 的斜率之积是 $-\frac{4}{9}$，可得出 x，y 之间的关系式，进而得到点 M 的轨迹方程.

解： 设点 M 的坐标为 (x, y)，因为点 A 的坐标是 $(-5, 0)$，所以直线 AM 的斜率

$$k_{AM}=\frac{y}{x+5}\ (x\neq-5).$$

同理，直线 BM 的斜率

$$k_{BM}=\frac{y}{x-5}\ (x\neq5).$$

由已知，有

$$\frac{y}{x+5}\times\frac{y}{x-5}=-\frac{4}{9}\ (x\neq\pm5),$$

化简，得点 M 的轨迹方程为

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{\frac{100}{9}}=1\ (x\neq\pm5).$$

点 M 的轨迹是除去 $(-5,0)$，$(5,0)$ 两点的椭圆.

运用信息技术，可以探究点 M 的轨迹形状.

练习

1. 如果椭圆 $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$ 上一点 P 与焦点 F_1 的距离等于 6，那么点 P 与另一个焦点 F_2 的距离是______.
2. 求适合下列条件的椭圆的标准方程：
   (1) $a=4$，$b=1$，焦点在 x 轴上；
   (2) $a=4$，$c=\sqrt{15}$，焦点在 y 轴上；
   (3) $a+b=10$，$c=2\sqrt{5}$.
3. 经过椭圆 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ 的右焦点 F_2 作垂直于 x 轴的直线 AB，交椭圆于 A，B 两点，F_1 是椭圆的左焦点.
   (1) 求 $\triangle AF_1B$ 的周长；
   (2) 如果 AB 不垂直于 x 轴，$\triangle AF_1B$ 的周长有变化吗？为什么？
4. 已知 A，B 两点的坐标分别是 $(-1,0)$，$(1,0)$，直线 AM，BM 相交于点 M，且直线 AM 的斜率与直线 BM 的斜率的商是 2，点 M 的轨迹是什么？为什么？

3.1.2 椭圆的简单几何性质

与利用直线的方程、圆的方程研究它们的几何性质一样，我们利用椭圆的标准方程研究椭圆的几何性质，包括椭圆的范围、形状、大小、对称性和特殊点等.

下面，我们用椭圆方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 来研究椭圆的几何性质.

通过对曲线的范围、对称性及特殊点的讨论，可以从整体上把握曲线的形状、大小和位置. 所以，本章对几种圆锥曲线都是从范围、对称性、顶点及其他特性等方面研究它们的几何性质.

观察

观察椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的形状，你能从图上看出它的范围吗？它具有怎样的对称性？椭圆上哪些点比较特殊？

1. 范围

思考

观察图 3.1-7，容易看出椭圆上的点都在一个特定的矩形内，你能利用方程（代数方法）确定出它的具体边界吗？

由方程$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，可知

$$\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{x^2}{a^2}\geqslant 0,$$

所以，椭圆上点的横坐标都适合不等式

$$\frac{x^2}{a^2}\leqslant 1,$$

即
$$-a\leqslant x\leqslant a.$$

同理有
$$\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1,$$

即
$$-b\leqslant y\leqslant b.$$

这说明椭圆位于直线 $x=\pm a$ 和 $y=\pm b$ 围成的矩形框里（图 3.1-7）.

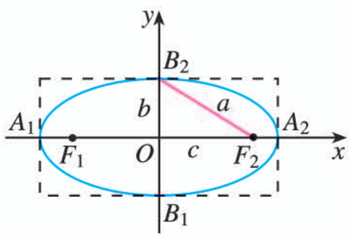


图 3.1-7

用代数方法研究曲线的范围，就是利用方程确定曲线上点的横、纵坐标的取值范围.

2. 对称性

探究

观察椭圆的形状，可以发现椭圆既是轴对称图形，又是中心对称图形. 如何利用方程说明椭圆的对称性？

在椭圆的标准方程$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）中，以$-y$代$y$，方程不变. 这说明当点$P(x, y)$在椭圆上时，它关于$x$轴的对称点$P_1(x, -y)$也在椭圆上，所以椭圆关于$x$轴对称. 同理，以$-x$代$x$，方程也不变，这说明如果点$P(x, y)$在椭圆上，那么它关于$y$轴的对称点$P_2(-x, y)$也在椭圆上，所以椭圆关于$y$轴对称. 以$-x$代$x$，以$-y$代$y$，

方程也不变，这说明当点 $P(x, y)$ 在椭圆上时，它关于原点的对称点 $P_3(-x, -y)$ 也在椭圆上，所以椭圆关于原点对称.

综上，椭圆关于 x 轴、y 轴都是对称的. 这时，坐标轴是椭圆的对称轴，原点是椭圆的对称中心，椭圆的对称中心叫做**椭圆的中心**.

3. 顶点

研究曲线上某些特殊点的位置，可以确定曲线的位置.

思考

你认为椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 上哪些点比较特殊？为什么？如何得到这些点的坐标？

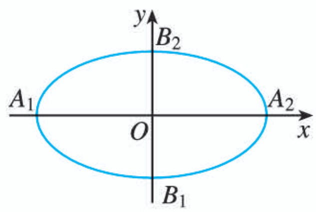


图 3.1-8

在椭圆的标准方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 中，令 $x=0$，得 $y=\pm b$. 因此 $B_1(0, -b)$，$B_2(0, b)$ 是椭圆与 y 轴的两个交点. 同理，令 $y=0$，得 $x=\pm a$. 因此 $A_1(-a, 0)$，$A_2(a, 0)$ 是椭圆与 x 轴的两个交点. 因为 x 轴、y 轴是椭圆的对称轴，所以椭圆与它的对称轴有四个交点，这四个交点叫做**椭圆的顶点**（图 3.1-8).

线段 A_1A_2，B_1B_2 分别叫做**椭圆的长轴**和**短轴**，它们的长分别等于 $2a$ 和 $2b$，a 和 b 分别叫做椭圆的长半轴长和短半轴长.

4. 离心率

思考

观察图 3.1-9，我们发现，不同形状的椭圆的扁平程度不同，相同形状的椭圆的扁平程度相同. 扁平程度是椭圆的重要形状特征，你能用适当的量定量刻画椭圆的扁平程度吗？

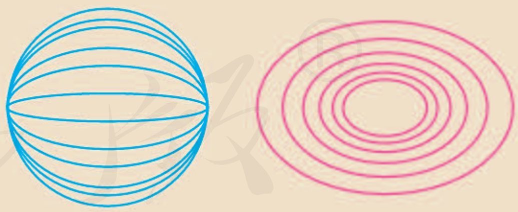


图 3.1-9

如图 3.1-10，椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的长半轴长为 a，半焦距为 c. 利用信息技术，保持长半轴长 a 不变，改变椭圆的半焦距 c，可以发现，c 越接近 a，椭圆越扁平. 类似地，保持 c 不变，改变 a 的大小，则 a 越接近 c，椭圆越扁平；而当 a，c 扩大或缩小相同倍数时，椭圆的形状不变.

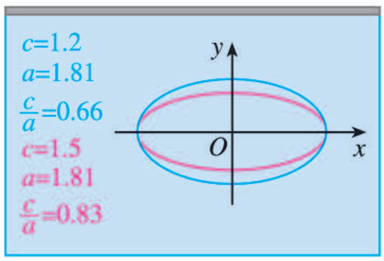


图 3.1-10

这样，利用 c 和 a 这两个量，可以刻画椭圆的扁平程度.

我们把椭圆的焦距与长轴长的比$\frac{c}{a}$称为椭圆的**离心率**①，用e表示，即$e=\frac{c}{a}$.

因为$a>c>0$，所以$0<e<1$. e越接近1，c越接近a，$b=\sqrt{a^2-c^2}$就越小，因此椭圆越扁平；反之，e越接近0，c越接近0，b越接近a，这时椭圆就越接近于圆.

当且仅当$a=b$时，$c=0$，这时两个焦点重合，图形变为圆，它的方程为

$$x^2+y^2=a^2.$$

> ？ 你能运用三角函数的知识解释，为什么$e=\frac{c}{a}$越大，椭圆越扁平？$e=\frac{c}{a}$越小，椭圆越接近于圆吗？

例 4 求椭圆$16x^2+25y^2=400$的长轴和短轴的长、离心率、焦点和顶点的坐标.

解： 把原方程化成标准方程，得

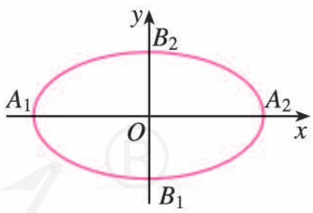
$$\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{4^2}=1,$$

于是$a=5$，$b=4$，$c=\sqrt{25-16}=3$.

因此，椭圆的长轴和短轴的长分别是$2a=10$和$2b=8$，离心率$e=\frac{c}{a}=\frac{3}{5}$，两个焦点坐标分别是$F_1(-3,\ 0)$和$F_2(3,\ 0)$，四个顶点坐标分别是$A_1(-5,\ 0)$，$A_2(5,\ 0)$，$B_1(0,\ -4)$和$B_2(0,\ 4)$.

练习

1. 你能用圆规作出图中椭圆焦点的位置吗？你的依据是什么？



（第1题）

2. 求下列椭圆的焦点坐标：

   (1) $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$；　　(2) $2x^2+y^2=8$.

3. 求适合下列条件的椭圆的标准方程：

   (1) 焦点在x轴上，$a=6$，$e=\frac{1}{3}$；(2) 焦点在y轴上，$c=3$，$e=\frac{3}{5}$.

4. 求适合下列条件的椭圆的标准方程：

   (1) 经过$P(-3,\ 0)$，$Q(0,\ -2)$两点；　　(2) 长轴长等于20，离心率等于$\frac{3}{5}$.

5. 比较下列每组中椭圆的形状，哪一个更接近于圆？为什么？

   (1) $9x^2+y^2=36$与$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$；　　(2) $x^2+9y^2=36$与$\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{10}=1$.

---

① 随着学习的深入你将体会到，虽然$\frac{b}{a}$也能刻画椭圆的扁平程度，但$\frac{c}{a}$中a，c是确定圆锥曲线的基本量，不仅能有效刻画两个焦点离开中心的程度，而且还蕴含着圆锥曲线几何特征的统一性.

例 5 如图 3.1-11，一种电影放映灯的反射镜面是旋转椭圆面（椭圆绕其对称轴旋转一周形成的曲面）的一部分．过对称轴的截口 BAC 是椭圆的一部分，灯丝位于椭圆的一个焦点 F_1 上，片门位于另一个焦点 F_2 上．由椭圆一个焦点 F_1 发出的光线，经过旋转椭圆面反射后集中到另一个焦点 F_2．已知 $BC \perp F_1F_2$，$|F_1B|=2.8$ cm，$|F_1F_2|=4.5$ cm．试建立适当的平面直角坐标系，求截口 BAC 所在椭圆的方程（精确到 0.1 cm）．

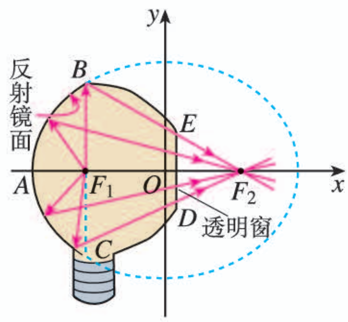


图 3.1-11

解： 建立如图 3.1-11 所示的平面直角坐标系，设所求椭圆方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0).$$

在 $\mathrm{Rt}\triangle BF_1F_2$ 中，

$$|F_2B|=\sqrt{|F_1B|^2+|F_1F_2|^2}=\sqrt{2.8^2+4.5^2}.$$

由椭圆的性质知，$|F_1B|+|F_2B|=2a$，所以

$$a=\frac{1}{2}(|F_1B|+|F_2B|)=\frac{1}{2}(2.8+\sqrt{2.8^2+4.5^2})\approx 4.1;$$

$$b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{4.1^2-2.25^2}\approx 3.4.$$

所以，所求的椭圆方程为

$$\frac{x^2}{4.1^2}+\frac{y^2}{3.4^2}=1.$$

例 6 动点 $M(x, y)$ 与定点 $F(4, 0)$ 的距离和 M 到定直线 l：$x=\frac{25}{4}$ 的距离的比是常数 $\frac{4}{5}$，求动点 M 的轨迹．

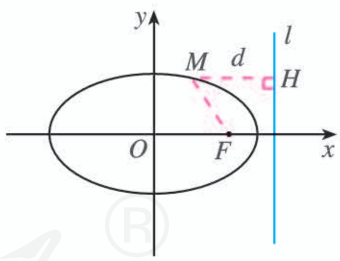


图 3.1-12

解： 如图 3.1-12，设 d 是点 M 到直线 l：$x=\frac{25}{4}$ 的距离，根据题意，动点 M 的轨迹就是集合

$$P=\left\{M \,\middle|\, \frac{|MF|}{d}=\frac{4}{5}\right\}.$$

由此得

$$\frac{\sqrt{(x-4)^2+y^2}}{\left|\frac{25}{4}-x\right|}=\frac{4}{5}.$$

将上式两边平方，并化简，得

$$9x^2+25y^2=225,$$

即

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1.$$

所以，点 M 的轨迹是长轴、短轴长分别为 10，6 的椭圆.

例 7 如图 3.1-13，已知直线 l：$4x-5y+m=0$ 和椭圆 C：$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$. m 为何值时，直线 l 与椭圆 C：（1）有两个公共点？（2）有且只有一个公共点？（3）没有公共点？

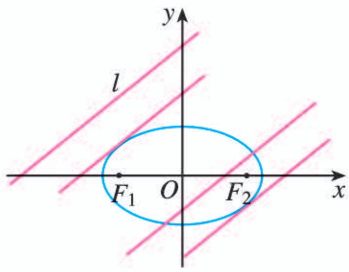


图 3.1-13

分析：直线 l 与椭圆 C 的公共点的个数与方程组

$$\begin{cases}4x-5y+m=0,\\ \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1\end{cases}$$

解的个数相对应. 所以，我们可以通过判断上述方程组解的情况得到问题的解答.

解：由方程组

$$\begin{cases}4x-5y+m=0,\\ \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1\end{cases}$$

消去 y，得

$$25x^2+8mx+m^2-225=0. \quad ①$$

方程①的根的判别式

$$\Delta=64m^2-4\times25\times(m^2-225)=36\times(25^2-m^2).$$

由 $\Delta>0$，得 $-25<m<25$. 此时方程①有两个不相等的实数根，直线 l 与椭圆 C 有两个不同的公共点.

由 $\Delta=0$，得 $m_1=25$，$m_2=-25$. 此时方程①有两个相等的实数根，直线 l 与椭圆 C 有且只有一个公共点.

由 $\Delta<0$，得 $m<-25$，或 $m>25$. 此时方程①没有实数根，直线 l 与椭圆 C 没有公共点.

练习

1. 求下列直线与椭圆的交点坐标：

（1）$3x+10y-25=0$，$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1$；　　（2）$3x-y+2=0$，$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$.

2. 经过椭圆 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 的左焦点 F_1 作倾斜角为 $60°$ 的直线 l，直线 l 与椭圆相交于 A，B 两点，求线段 AB 的长.

习题 3.1

复习巩固

1. 如果点 $M(x, y)$ 在运动过程中，总满足关系式

$$\sqrt{x^2+(y-3)^2}+\sqrt{x^2+(y+3)^2}=10,$$

那么点 M 的轨迹是什么曲线？为什么？写出它的方程.

2. 写出适合下列条件的椭圆的标准方程：

(1) 焦点坐标分别为 $(0, -4)$，$(0, 4)$，$a=5$；

(2) $a+c=10$，$a-c=4$.

3. 求下列椭圆的长轴和短轴长、离心率、焦点坐标、顶点坐标，并画出图形：

(1) $x^2+4y^2=16$；　　(2) $9x^2+y^2=81$.

4. 求适合下列条件的椭圆的标准方程：

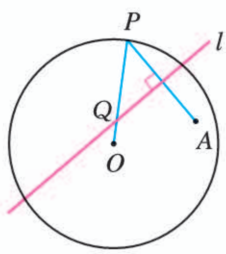
(1) 经过 $P(-2\sqrt{2}, 0)$，$Q(0, \sqrt{5})$ 两点；

(2) 长轴长是短轴长的 3 倍，且经过点 $P(3, 0)$；

(3) 焦距是 8，离心率等于 0.8.

5. 已知 P 是椭圆 $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$ 上的一点，且以点 P 及焦点 F_1，F_2 为顶点的三角形的面积等于 1，求点 P 的坐标.

6. 如图，圆 O 的半径为定长 r，A 是圆 O 内一个定点，P 是圆 O 上任意一点. 线段 AP 的垂直平分线 l 和半径 OP 相交于点 Q，当点 P 在圆上运动时，点 Q 的轨迹是什么？为什么？



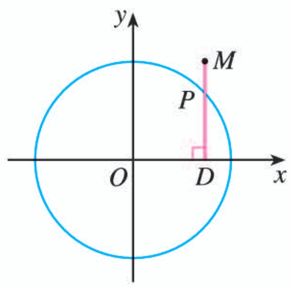
(第 6 题)

7. 彗星“紫金山一号”是南京紫金山天文台发现的，它的运行轨道是以太阳为一个焦点的椭圆. 测得轨道的近日点（距离太阳最近的点）距太阳中心 1.486 天文单位，远日点（距离太阳最远的点）距太阳中心 5.563 天文单位（1 天文单位是太阳到地球的平均距离，约 1.5×10^8 km），且近日点、远日点及太阳中心在同一条直线上，求轨道的方程.

8. 点 M 与定点 $F(2, 0)$ 的距离和它到定直线 $x=8$ 的距离的比是 $1:2$，求点 M 的轨迹方程，并说明轨迹是什么图形.

综合运用

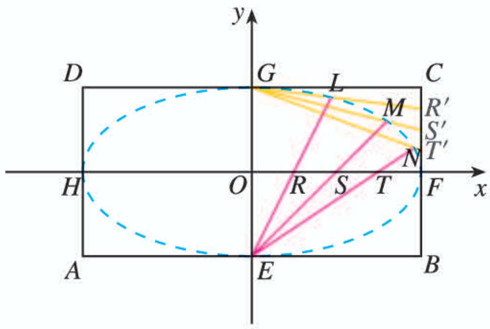
9. 如图，$DP\perp x$ 轴，垂足为 D，点 M 在 DP 的延长线上，且 $\frac{|DM|}{|DP|}=\frac{3}{2}$. 当点 P 在圆 $x^2+y^2=4$ 上运动时，求点 M 的轨迹方程，并说明轨迹的形状.



(第 9 题)

10. 一动圆与圆 $x^2+y^2+6x+5=0$ 外切，同时与圆 $x^2+y^2-6x-91=0$ 内切，求动圆圆心的轨迹方程，并说明它是什么曲线.

11. 如图，矩形 $ABCD$ 中，$|AB|=2a$，$|BC|=2b$（$a>b>0$）. E，F，G，H 分别是矩形四条边的中点，R，S，T 是线段 OF 的四等分点，R'，S'，T'是线段 CF 的四等分点. 证明直线 ER 与 GR'、ES 与 GS'、ET 与 GT'的交点 L，M，N 都在椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）上.



（第 11 题）

12. 已知地球运行的轨道是长半轴长 $a=1.50\times10^8$ km，离心率 $e=0.019\ 2$ 的椭圆，且太阳在这个椭圆的一个焦点上，求地球到太阳的最大和最小距离.

拓广探索

13. 已知椭圆$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$，直线 l：$4x-5y+40=0$. 椭圆上是否存在一点，使得：

（1）它到直线 l 的距离最小？最小距离是多少？

（2）它到直线 l 的距离最大？最大距离是多少？

14. 已知椭圆$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$，一组平行直线的斜率是$\frac{3}{2}$.

（1）这组直线何时与椭圆有两个公共点？

（2）当它们与椭圆有两个公共点时，证明这些直线被椭圆截得的线段的中点在同一条直线上.

信息技术应用

用信息技术探究点的轨迹：椭圆

如图 1，F 是定点，l 是不经过点 F 的定直线，动点 M 与定点 F 的距离和 M 到定直线 l 的距离的比 e 是小于 1 的常数. 用信息技术软件（如《GeoGebra》）画出动点 M 的轨迹，观察这个轨迹，可以发现它是一个椭圆.

在 $0<e<1$ 的范围内，改变 e 的大小，或改变点 F 与直线 l 的相对位置，可以发现动点 M 的轨迹仍然是一个椭圆.

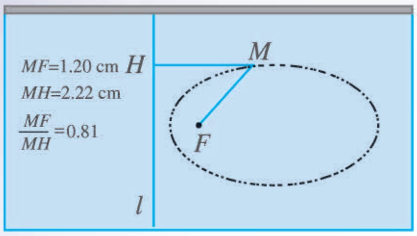


图 1

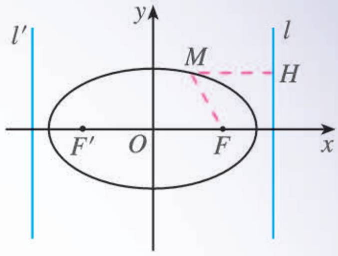


图 2

在平面直角坐标系中，我们可以把上述问题叙述为：

若点 $M(x, y)$ 与定点 $F(c, 0)$ （或 $F'(-c, 0)$）的距离和它到定直线 l：$x=\frac{a^2}{c}$$\left(\text{或 } l'\text{：} x=-\frac{a^2}{c}\right)$的距离的比是常数$\frac{c}{a}(0<c<a)$，则点 M 的轨迹是一个椭圆（图 2），这是从另一个角度给出了椭圆的定义．这里定点 $F(c, 0)$ 是椭圆的一个焦点，直线 l：$x=\frac{a^2}{c}$称为相应于焦点 F 的准线；定点 $F'(-c, 0)$ 是椭圆的另一个焦点，直线 l'：$x=-\frac{a^2}{c}$称为相应于焦点 F'的准线．

在推导椭圆标准方程时，我们曾得到

$$a^2-cx=a\sqrt{(x-c)^2+y^2}. \qquad ①$$

如果把①式变形为

$$\frac{\sqrt{(x-c)^2+y^2}}{\frac{a^2}{c}-x}=\frac{c}{a}, \qquad ②$$

则②式的几何意义就是动点 $M(x, y)$ 与定点 $F(c, 0)$ 的距离和动点 M 到定直线 l：$x=\frac{a^2}{c}$的距离的比是常数$\frac{c}{a}$．

思考：在推导椭圆标准方程时作怎样的变形就可以得到点 $M(x, y)$ 与定点 $F(-c, 0)$ 的距离和动点 M 到定直线 l'：$x=-\frac{a^2}{c}$的距离的比是常数$\frac{c}{a}$？

对上述过程你有什么体会？

3.2 双曲线

双曲线也是具有广泛应用的一种圆锥曲线，如发电厂冷却塔的外形、通过声音时差测定位等都要用到双曲线的性质. 本节我们将类比椭圆的研究方法研究双曲线的有关问题.

3.2.1 双曲线及其标准方程

我们知道，平面内与两个定点 F_1，F_2 的距离的和等于常数（大于$|F_1F_2|$）的点的轨迹是椭圆. 一个自然的问题是：平面内与两个定点的距离的差等于常数的点的轨迹是什么？下面我们先用信息技术探究一下.

探究

如图 3.2-1，在直线 l 上取两个定点 A，B，P 是直线 l 上的动点. 在平面内，取定点 F_1，F_2，以点 F_1 为圆心、线段 PA 为半径作圆，再以 F_2 为圆心、线段 PB 为半径作圆.

我们知道，当点 P 在线段 AB 上运动时，如果$||PA|-|PB||<|F_1F_2|<|AB|$，那么两圆相交，其交点的轨迹是椭圆.

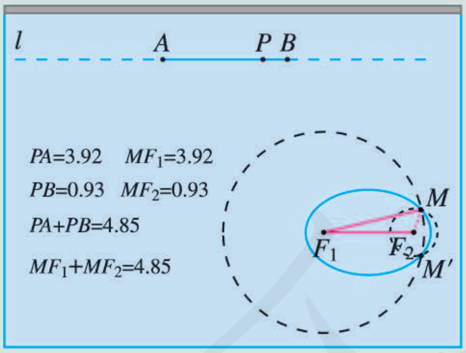


图 3.2-1

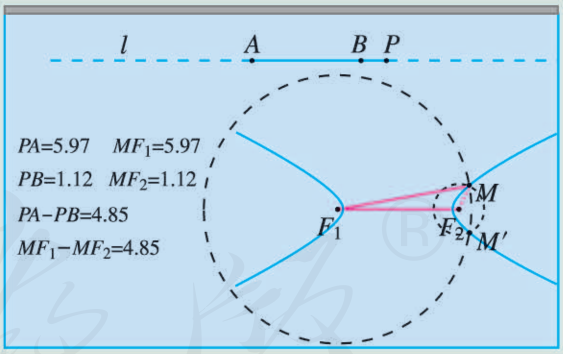


图 3.2-2

如图 3.2-2，在$|AB|<|F_1F_2|<|PA|+|PB|$的条件下，让点 P 在线段 AB 外运动，这时动点 M 满足什么几何条件？两圆交点的轨迹是什么形状？

我们发现，在$|AB|<|F_1F_2|<|PA|+|PB|$的条件下，点 P 在线段 AB 外运动时，当点 M 靠近定点 F_1 时，$|MF_2|-|MF_1|=|AB|$；当点 M 靠近定点 F_2 时，$|MF_1|-|MF_2|=|AB|$. 总之，点 M 与两个定点 F_1，F_2 距离的差的绝对值$|AB|$是一个常数（$|AB|<|F_1F_2|$）. 这时，两圆交点的轨迹是不同于椭圆的曲线，它分左右两支.

一般地，我们把平面内与两个定点 F_1，F_2 的距离的差的绝对值等于非零常数（小于 $|F_1F_2|$）的点的轨迹叫做**双曲线**（hyperbola）. 这两个定点叫做双曲线的**焦点**，两焦点间的距离叫做双曲线的**焦距**.

探究

类比求椭圆标准方程的过程，我们如何建立适当的坐标系，得出双曲线的方程？

观察我们画出的双曲线，发现它也具有对称性，而且直线 F_1F_2 是它的一条对称轴，所以我们取经过两焦点 F_1 和 F_2 的直线为 x 轴，线段 F_1F_2 的垂直平分线为 y 轴，建立如图 3.2-3 所示的平面直角坐标系 Oxy. 设 $M(x, y)$ 是双曲线上任意一点，双曲线的焦距为 $2c(c>0)$，那么，焦点 F_1，F_2 的坐标分别是 $(-c, 0)$，$(c, 0)$，又设 $||MF_1|-|MF_2||=2a$（a 为大于 0 的常数，$a<c$）.

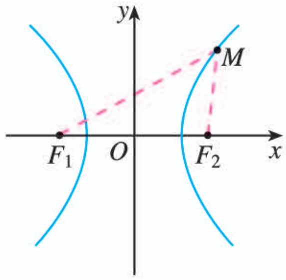


图 3.2-3

由双曲线的定义，双曲线就是下列点的集合：

$P=\{M\mid ||MF_1|-|MF_2||=2a, 0<2a<|F_1F_2|\}$.

因为

$$|MF_1|=\sqrt{(x+c)^2+y^2},$$

$$|MF_2|=\sqrt{(x-c)^2+y^2},$$

所以

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm 2a. \qquad ①$$

类比椭圆标准方程的化简过程，化简①，得

$$(c^2-a^2)x^2-a^2y^2=a^2(c^2-a^2),$$

两边同除以 $a^2(c^2-a^2)$，得

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{c^2-a^2}=1.$$

由双曲线的定义知，$2c>2a$，即 $c>a$，所以 $c^2-a^2>0$.

> 你能在 y 轴上找一点 B，使得 $|OB|=b$ 吗？

类比椭圆标准方程的建立过程，令 $b^2=c^2-a^2$，其中 $b>0$，代入上式，得

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0, b>0). \qquad ②$$

从上述过程可以看到，双曲线上任意一点的坐标 (x, y) 都是方程②的解；以方程②的解为坐标的点 (x, y) 与双曲线的两个焦点 $F_1(-c, 0)$，$F_2(c, 0)$ 的距离之差的绝对值都为 $2a$，即以方程②的解为坐标的点都在双曲线上. 我们称方程②是双曲线的方程，这个方程叫做**双曲线的标准方程**. 它表示焦点在 x 轴上，焦点分别是 $F_1(-c, 0)$，$F_2(c, 0)$ 的双曲线，这里 $c^2=a^2+b^2$.

思考

类比焦点在 y 轴上的椭圆标准方程，焦点在 y 轴上的双曲线的标准方程是什么？

如图 3.2-4，双曲线的焦距为 $2c$，焦点分别是 $F_1(0, -c)$，$F_2(0, c)$，a，b 的意义同上，这时双曲线的方程是

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0),$$

这个方程也是双曲线的标准方程.

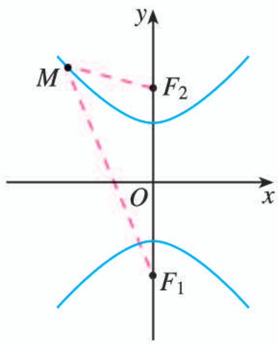


图 3.2-4

例 1 已知双曲线的两个焦点分别为 $F_1(-5, 0)$，$F_2(5, 0)$，双曲线上一点 P 与 F_1，F_2 的距离差的绝对值等于 6，求双曲线的标准方程.

解： 因为双曲线的焦点在 x 轴上，所以设它的标准方程为

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0).$$

由 $2c=10$，$2a=6$，得 $c=5$，又 $a=3$，因此 $b^2=5^2-3^2=16$.

所以，双曲线的标准方程为

$$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1.$$

例 2 已知 A，B 两地相距 800 m，在 A 地听到炮弹爆炸声比在 B 地晚 2 s，且声速为 340 m/s，求炮弹爆炸点的轨迹方程.

分析： 先根据题意判断轨迹的形状. 由声速及 A，B 两处听到炮弹爆炸声的时间差，可知 A，B 两处与爆炸点的距离的差为定值，所以爆炸点在以 A，B 为焦点的双曲线上. 因为爆炸点离 A 处比离 B 处远，所以爆炸点应在靠近 B 处的双曲线的一支上.

解： 如图 3.2-5，建立平面直角坐标系 Oxy，使 A，B 两点在 x 轴上，并且原点 O 与线段 AB 的中点重合.

设炮弹爆炸点 P 的坐标为 (x, y)，则

$$|PA|-|PB|=340\times 2=680,$$

即 $2a=680$，$a=340$.

又 $|AB|=800$，所以 $2c=800$，$c=400$，$b^2=c^2-a^2=44\ 400$.

因为 $|PA|-|PB|=680>0$，所以点 P 的轨迹是双曲线的右支，因此 $x\geqslant 340$.

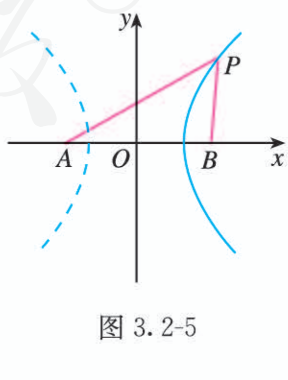


图 3.2-5

所以，炮弹爆炸点的轨迹方程为

$$\frac{x^2}{115\ 600}-\frac{y^2}{44\ 400}=1\ (x\geqslant 340).$$

利用两个不同的观测点 A，B 测得同一点 P 发出信号的时间差，可以确定点 P 所在双曲线的方程．如果再增设一个观测点 C，利用 B，C（或 A，C）两处测得的点 P 发出信号的时间差，就可以确定点 P 所在另一双曲线的方程．解这两个方程组成的方程组，就能确定点 P 的准确位置，这是双曲线的一个重要应用．

探究

如图 3.2-6，点 A，B 的坐标分别是 $(-5,\ 0)$，$(5,\ 0)$，直线 AM，BM 相交于点 M，且它们的斜率之积是 $\frac{4}{9}$，试求点 M 的轨迹方程，并由点 M 的轨迹方程判断轨迹的形状，与 3.1 例 3 比较，你有什么发现？

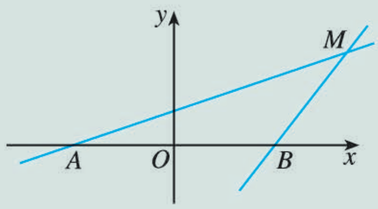


图 3.2-6

练习

1. 求适合下列条件的双曲线的标准方程：

（1）焦点在 x 轴上，$a=4$，$b=3$；

（2）焦点在 x 轴上，经过点 $(-\sqrt{2},\ -\sqrt{3})$，$\left(\frac{\sqrt{15}}{3},\ \sqrt{2}\right)$；

（3）焦点为 $(0,\ -6)$，$(0,\ 6)$，且经过点 $(2,\ -5)$．

2. 求证：双曲线 $x^2-15y^2=15$ 与椭圆 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ 的焦点相同．

3. 已知方程 $\frac{x^2}{2+m}-\frac{y^2}{m+1}=1$ 表示双曲线，求 m 的取值范围．

4. 双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{12}=1$ $(a>0)$ 的两个焦点分别是 F_1 与 F_2，焦距为 8；M 是双曲线上的一点，且 $|MF_1|=5$，求 $|MF_2|$ 的值．

3.2.2 双曲线的简单几何性质

思考

类比对椭圆几何性质的研究，你认为应该研究双曲线

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0) \qquad ①$$

的哪些几何性质？如何研究这些性质？

1. 范围

类比研究椭圆范围的方法，观察双曲线，我们发现双曲线上点的横坐标的范围是 $x\leqslant -a$，或 $x\geqslant a$，纵坐标的范围是 $y\in\mathbf{R}$（图 3.2-7）.

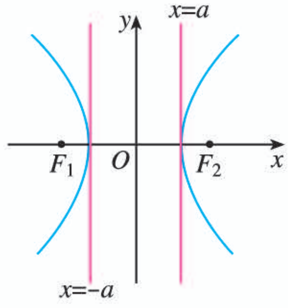


图 3.2-7

下面利用双曲线的方程求出它的范围.

由方程①可得

$$\frac{x^2}{a^2}=1+\frac{y^2}{b^2}\geqslant 1,$$

于是，双曲线上点的坐标 $(x,\ y)$ 都适合不等式 $\frac{x^2}{a^2}\geqslant 1$，$y\in\mathbf{R}$，即

$$x^2\geqslant a^2,\ y\in\mathbf{R}.$$

所以 $x\leqslant -a$，或 $x\geqslant a$；$y\in\mathbf{R}$.

这说明双曲线位于直线 $x=-a$ 及其左侧和直线 $x=a$ 及其右侧的区域.

2. 对称性

类比研究椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 对称性的方法，容易得到，双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ 关于 x 轴、y 轴和原点都是对称的. 这时，坐标轴是双曲线的对称轴，原点是双曲线的对称中心. 双曲线的对称中心叫做**双曲线的中心**.

3. 顶点

类比求椭圆顶点的方法，在方程①中，令 $y=0$，得 $x=\pm a$，因此双曲线和 x 轴有两个交点 $A_1(-a,\ 0)$，$A_2(a,\ 0)$. 因为 x 轴是双曲线的对称轴，所以双曲线和它的对称轴有两个交点，它们叫做**双曲线的顶点**.

令 $x=0$，得 $y^2=-b^2$，这个方程没有实数解，说明双曲线和 y 轴没有公共点，但我们也把 $B_1(0,\ -b)$，$B_2(0,\ b)$ 两点画在 y 轴上（图 3.2-8）.

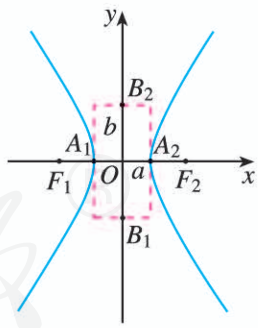


图 3.2-8

线段 A_1A_2 叫做**双曲线的实轴**，它的长等于 $2a$，a 叫做双曲线的实半轴长；线段 B_1B_2 叫做**双曲线的虚轴**，它的长等于 $2b$，b 叫做双曲线的虚半轴长.

4. 渐近线

探究

利用信息技术画出双曲线 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$ 和两条直线 $\frac{x}{3}\pm\frac{y}{2}=0$（图 3.2-9）. 在双曲线

$\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}=1$ 的右支上取一点 M，测量点 M 的横坐标 x_M 以及它到直线 $\dfrac{x}{3}-\dfrac{y}{2}=0$ 的距离 d. 沿曲线向右上方拖动点 M，观察 x_M 与 d 的大小关系，你发现了什么？

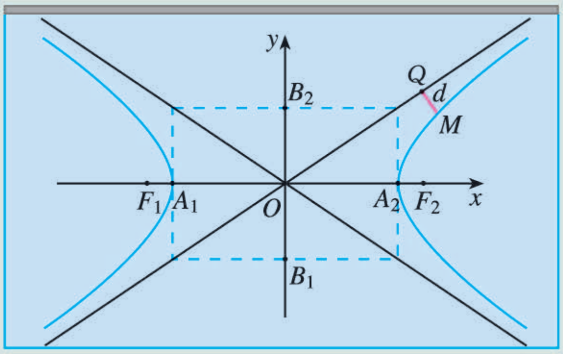


图 3.2-9

可以发现，点 M 的横坐标 x_M 越来越大，d 越来越小，但是 d 始终不等于 0.

实际上，经过两点 A_1，A_2 作 y 轴的平行线 $x=\pm 3$，经过两点 B_1，B_2 作 x 轴的平行线 $y=\pm 2$，四条直线围成一个矩形（图 3.2-9），矩形的两条对角线所在直线的方程是 $\dfrac{x}{3}\pm\dfrac{y}{2}=0$. 可以发现，双曲线 $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}=1$ 的两支向外延伸时，与两条直线 $\dfrac{x}{3}\pm\dfrac{y}{2}=0$ 逐渐接近，但永远不相交.

一般地，双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$，$b>0$）的两支向外延伸时，与两条直线 $\dfrac{x}{a}\pm\dfrac{y}{b}=0$ 逐渐接近，我们把这两条直线叫做**双曲线的渐近线**. 实际上，双曲线与它的渐近线无限接近，但永远不相交.

在双曲线方程 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$，$b>0$）中，如果 $a=b$，那么方程变为 $x^2-y^2=a^2$，此时双曲线的实轴和虚轴的长都等于 $2a$. 这时，四条直线 $x=\pm a$，$y=\pm a$ 围成正方形，渐近线方程为 $y=\pm x$，它们互相垂直，并且平分双曲线的实轴和虚轴所成的角. 实轴和虚轴等长的双曲线叫做**等轴双曲线**.

5. 离心率

与椭圆类似，双曲线的焦距与实轴长的比 $\dfrac{c}{a}$，叫做**双曲线的离心率**. 因为 $c>a>0$，所以双曲线的离心率 $e=\dfrac{c}{a}>1$.

思考

椭圆的离心率刻画了椭圆的扁平程度，双曲线的离心率刻画双曲线的什么几何特征？

用双曲线渐近线的斜率能刻画双曲线的“张口”大小吗？它与用离心率刻画“张口”大小有什么联系和区别？

双曲线的离心率刻画了双曲线的“张口”大小.

例 3　求双曲线 $9y^2-16x^2=144$ 的实半轴长和虚半轴长、焦点坐标、离心率、渐近线方程.

解： 把双曲线的方程 $9y^2-16x^2=144$ 化为标准方程

$$\frac{y^2}{4^2}-\frac{x^2}{3^2}=1.$$

由此可知，实半轴长 $a=4$，虚半轴长 $b=3$；$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5$，焦点坐标是 $(0,\ -5)$，$(0,\ 5)$；离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{5}{4}$；渐近线方程为 $y=\pm\frac{4}{3}x$.

练习

1. 求下列双曲线的实轴和虚轴的长、顶点和焦点的坐标以及离心率：

   (1) $x^2-8y^2=32$；　　(2) $9x^2-y^2=81$；

   (3) $x^2-y^2=-4$；　　(4) $\frac{x^2}{49}-\frac{y^2}{25}=-1$.

2. 求符合下列条件的双曲线的标准方程：

   (1) 顶点在 x 轴上，两顶点间的距离是 8，$e=\frac{5}{4}$；

   (2) 焦点在 y 轴上，焦距是 16，$e=\frac{4}{3}$.

3. 对称轴都在坐标轴上的等轴双曲线的一个焦点是 $F_1(-6,\ 0)$，求双曲线的标准方程和渐近线方程.
4. 双曲线的渐近线方程是 $y=\pm 2x$，虚轴长为 4，求双曲线的标准方程.

例 4　双曲线型冷却塔的外形，是双曲线的一部分绕其虚轴旋转所成的曲面（图 3.2-10 (1)）. 它的最小半径为 12 m，上口半径为 13 m，下口半径为 25 m，高为 55 m. 试建立适当的坐标系，求出此双曲线的方程（精确到 1 m）.

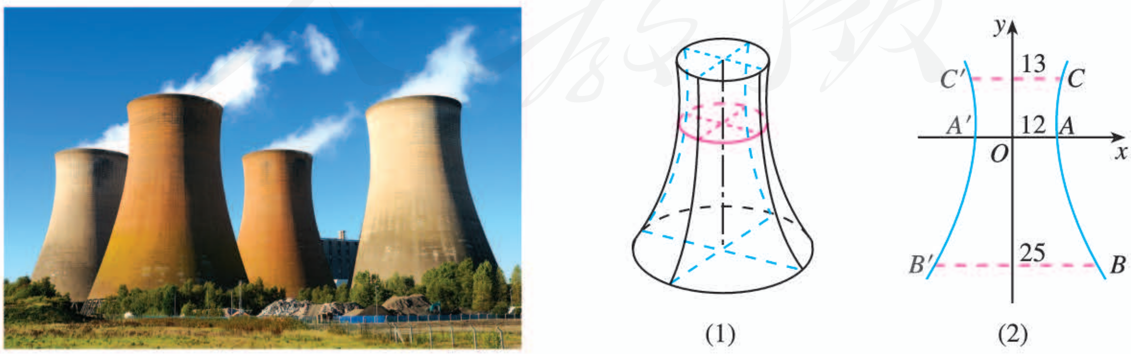


图 3.2-10

解： 根据双曲线的对称性，在冷却塔的轴截面所在平面建立如图 3.2-10 (2) 所示的直角坐标系 Oxy，使小圆的直径 AA' 在 x 轴上，圆心与原点重合. 这时，上、下口的直

径 CC'，BB'都平行于 x 轴，且 $|CC'|=13\times2$，$|BB'|=25\times2$.

设双曲线的方程为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$，点 C 的坐标为 $(13,\ y)$，则点 B 的坐标为 $(25,\ y-55)$.

因为直径 AA'是实轴，所以 $a=12$. 又 B，C 两点都在双曲线上，所以

$$\begin{cases}\dfrac{25^2}{12^2}-\dfrac{(y-55)^2}{b^2}=1, & ①\\[2ex] \dfrac{13^2}{12^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1. & ②\end{cases}$$

由方程②，得 $y=\frac{5b}{12}$（负值舍去）. 代入方程①，得

$$\frac{25^2}{12^2}-\frac{\left(\frac{5b}{12}-55\right)^2}{b^2}=1.$$

化简得

$$19b^2+275b-18\ 150=0. \qquad ③$$

解方程③，得

$$b\approx25\text{（负值舍去）}.$$

因此所求双曲线的方程为

$$\frac{x^2}{144}-\frac{y^2}{625}=1.$$

例 5 动点 $M(x,\ y)$ 与定点 $F(4,\ 0)$ 的距离和它到定直线 l：$x=\frac{9}{4}$的距离的比是常数$\frac{4}{3}$，求动点 M 的轨迹.

解： 设 d 是点 M 到直线 l 的距离，根据题意，动点 M 的轨迹就是点的集合

$$P=\left\{M\left|\frac{|MF|}{d}=\frac{4}{3}\right.\right\},$$

由此得

$$\frac{\sqrt{(x-4)^2+y^2}}{\left|x-\frac{9}{4}\right|}=\frac{4}{3}.$$

将上式两边平方，并化简，得

$$7x^2-9y^2=63,$$

即

$$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{7}=1.$$

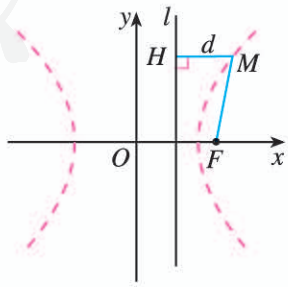


图 3.2-11

所以，点 M 的轨迹是焦点在 x 轴上，实轴长为 6、虚轴长为 $2\sqrt{7}$ 的双曲线（图 3.2-11）.

思考

将例 5 与椭圆一节中的例 6 比较，你有什么发现？

例 6 如图 3.2-12，过双曲线$\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{6}=1$的右焦点 F_2，倾斜角为 30°的直线交双曲线于 A，B 两点，求$|AB|$.

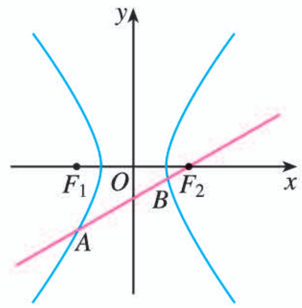


图 3.2-12

解： 由双曲线的标准方程可知，双曲线的焦点分别为 $F_1(-3,\ 0)$，$F_2(3,\ 0)$.

因为直线 AB 的倾斜角是 30°，且经过右焦点 F_2，所以直线 AB 的方程为

$$y=\frac{\sqrt{3}}{3}(x-3). \qquad ①$$

由$\begin{cases} y=\frac{\sqrt{3}}{3}(x-3), \\ \frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{6}=1 \end{cases}$消去 y，得

$$5x^2+6x-27=0.$$

解方程，得

$$x_1=-3,\ x_2=\frac{9}{5}.$$

将 x_1，x_2 的值分别代入①，得

$$y_1=-2\sqrt{3},\ y_2=-\frac{2\sqrt{3}}{5}.$$

于是，A，B 两点的坐标分别为 $(-3,\ -2\sqrt{3})$，$\left(\frac{9}{5},\ -\frac{2\sqrt{3}}{5}\right)$.

所以

$$\begin{aligned} |AB| &= \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2} \\ &= \sqrt{\left(-3-\frac{9}{5}\right)^2+\left(-2\sqrt{3}+\frac{2\sqrt{3}}{5}\right)^2} \\ &= \frac{16\sqrt{3}}{5}. \end{aligned}$$

练习

1. 已知 A，B 两点的坐标分别是 $(-6,\ 0)$，$(6,\ 0)$，直线 AM，BM 相交于点 M，且它们的斜率之积是$\frac{2}{9}$. 求点 M 的轨迹方程，并判断轨迹的形状.

2. 求下列直线和双曲线的交点坐标：

(1) $2x-y-10=0$, $\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{5}=1$； (2) $4x-3y-16=0$, $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$.

3. 直线 $y=\frac{2}{3}x$ 与双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{8}=1$ $(a>0)$ 相交于 A，B 两点，且 A，B 两点的横坐标之积为-9，求离心率 e.

习题 3.2

复习巩固

1. 双曲线 $4x^2-y^2+64=0$ 上一点 P 与它的一个焦点的距离等于 1，那么点 P 与另一个焦点的距离等于______.

2. 求适合下列条件的双曲线的标准方程：

(1) 焦点在 x 轴上，$a=2\sqrt{5}$，经过点 $A(-5, 2)$；

(2) 经过 $A(-7, -6\sqrt{2})$，$B(2\sqrt{7}, 3)$ 两点.

3. 已知下列双曲线的方程，求它的焦点坐标、离心率和渐近线方程：

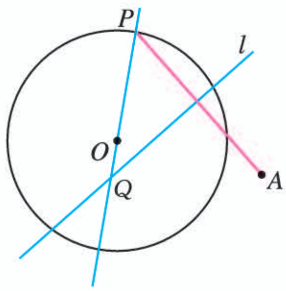
(1) $16x^2-9y^2=144$； (2) $16x^2-9y^2=-144$.

4. 求适合下列条件的双曲线的标准方程：

(1) 焦点在 x 轴上，实轴长是 10，虚轴长是 8；

(2) 焦点在 y 轴上，焦距是 10，虚轴长是 8；

(3) 离心率 $e=\sqrt{2}$，经过点 $M(-5, 3)$.



(第 5 题)

5. 如图，圆 O 的半径为定长 r，A 是圆 O 外一个定点，P 是圆 O 上任意一点. 线段 AP 的垂直平分线 l 与直线 OP 相交于点 Q，当点 P 在圆 O 上运动时，点 Q 的轨迹是什么？为什么？

6. 求经过点 $A(3, -1)$，并且对称轴都在坐标轴上的等轴双曲线的标准方程.

综合运用

7. m，n 为何值时，方程$\frac{x^2}{m}+\frac{y^2}{n}=1$ 表示下列曲线：

(1) 圆；(2) 椭圆；(3) 双曲线？

8. 求与椭圆$\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{24}=1$ 有公共焦点，且离心率 $e=\frac{5}{4}$ 的双曲线的方程.

9. 相距 1 400 m 的 A，B 两个哨所，听到炮弹爆炸声的时间相差 3 s，已知声速是 340 m/s，问炮弹爆炸点在怎样的曲线上，并求出曲线的方程.

10. 设动点 M 与定点 $F(c, 0)$ $(c>0)$ 的距离和 M 到定直线 l：$x=\frac{a^2}{c}$ 的距离的比是$\frac{c}{a}$ $(a<c)$，求动点 M 的轨迹方程，并说明轨迹的形状.

11. M 是一个动点，MA 与直线 $y=x$ 垂直，垂足 A 位于第一象限，MB 与直线 $y=-x$ 垂直，垂足 B 位于第四象限. 若四边形 $OAMB$（O 为原点）的面积为 3，求动点 M 的轨迹方程.

12. 设椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）与双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的离心率分别为 e_1，e_2，双曲线的渐近线的斜率小于 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$，求 e_1 和 e_2 的取值范围.

拓广探索

13. 已知双曲线 $x^2-\frac{y^2}{2}=1$，过点 $P(1,\ 1)$ 的直线 l 与双曲线相交于 A，B 两点，P 能否是线段 AB 的中点？为什么？

14. 已知双曲线 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{16}=1$ 与直线 l：$y=kx+m$（$k\neq\pm2$）有唯一的公共点 M，过点 M 且与 l 垂直的直线分别交 x 轴、y 轴于 $A(x,\ 0)$，$B(0,\ y)$ 两点. 当点 M 运动时，求点 $P(x,\ y)$ 的轨迹方程，并说明轨迹是什么曲线. 如果推广到一般双曲线，能得到什么相应的结论？

探究与发现

为什么 $y=\pm\frac{b}{a}x$ 是双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的渐近线

前面我们利用信息技术，直观地得到了直线 $y=\pm\frac{b}{a}x$ 是双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的渐近线，下面我们给出证明.

如图 1，在第一象限内，双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$，$b>0$）的方程可写为 $y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$（$x>a$）. 设 $M(x,\ y)$ 是其图象上的点，$N(x,\ Y)$ 是直线 $y=\frac{b}{a}x$ 上的点，且与 $M(x,\ y)$ 有相同的横坐标，则 $Y=\frac{b}{a}x$.

因为 $y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}=\frac{b}{a}x\sqrt{1-\left(\frac{a}{x}\right)^2}<\frac{b}{a}x=Y$，

所以 $|MN|=Y-y=\frac{b}{a}(x-\sqrt{x^2-a^2})$

$$=\frac{b}{a}\cdot\frac{(x-\sqrt{x^2-a^2})(x+\sqrt{x^2-a^2})}{x+\sqrt{x^2-a^2}}$$

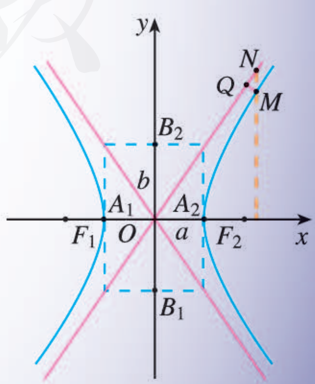


图 1

$$=\frac{ab}{x+\sqrt{x^2-a^2}}.$$

设 $|MQ|$ 是点 M 到直线 $y=\frac{b}{a}x$ 的距离，则 $|MQ|<|MN|$.

当 x 逐渐增大时，$|MN|$ 逐渐减小，x 无限增大时，$|MN|$ 无限接近于 0，$|MQ|$ 也无限接近于 0. 也就是说，双曲线在第一象限向右上方延伸时，是从射线 ON（O 为原点）的下方逐渐接近于射线 ON，但与射线 ON 永远不相交.

根据双曲线的对称性，在其他象限内，也有类似的结论.

另外，我们也可直接计算 $|MQ|$，证明当 x 无限增大时，$|MQ|$ 无限接近于 0.

3.3 抛物线

通过前面的学习可以发现，如果动点 M 到定点 F 的距离与 M 到定直线 l（不过点 F）的距离之比为 k，当 $0<k<1$ 时，点 M 的轨迹为椭圆；当 $k>1$ 时，点 M 的轨迹为双曲线. 一个自然的问题是：当 $k=1$ 时，即动点 M 到定点 F 的距离与它到定直线 l 的距离相等时，点 M 的轨迹会是什么形状？下面我们就来研究这个问题.

3.3.1 抛物线及其标准方程

探究

利用信息技术作图. 如图 3.3-1，F 是定点，l 是不经过点 F 的定直线，H 是直线 l 上任意一点，过点 H 作 $MH \perp l$，线段 FH 的垂直平分线 m 交 MH 于点 M. 拖动点 H，点 M 随之运动，你能发现点 M 满足的几何条件吗？它的轨迹是什么形状？

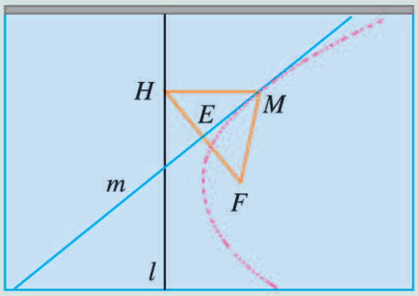


图 3.3-1

可以发现，在点 M 随着点 H 运动的过程中，始终有 $|MF|=|MH|$，即点 M 与定点 F 的距离等于它到定直线 l 的距离，点 M 的轨迹形状与二次函数的图象相似.

我们把平面内与一个定点 F 和一条定直线 l（l 不经过点 F）的距离相等的点的轨迹叫做**抛物线**（parabola）. 点 F 叫做**抛物线的焦点**，直线 l 叫做**抛物线的准线**.

思考

比较椭圆、双曲线标准方程的建立过程，你认为如何建立坐标系，可能使所求抛物线的方程形式简单？

根据抛物线的几何特征，如图 3.3-2，我们取经过点 F 且垂直于直线 l 的直线为 x 轴，垂足为 K，并使原点与线段 KF 的中点重合，建立平面直角坐标系 Oxy. 设 $|KF|=p(p>0)$，那么焦点 F 的坐标为 $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$，准线 l 的方程为 $x=-\frac{p}{2}$.

设 $M(x, y)$ 是抛物线上任意一点，点 M 到准线 l 的距离为 d. 由抛物线的定义，

抛物线是点的集合

$$P=\{M \mid |MF|=d\}.$$

因为 $|MF|=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}$，$d=\left|x+\frac{p}{2}\right|$，

所以

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=\left|x+\frac{p}{2}\right|.$$

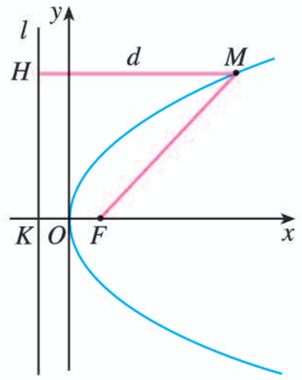


图 3.3-2

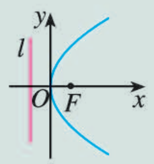
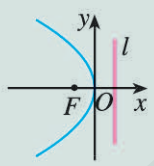
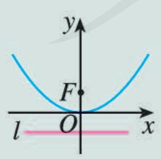
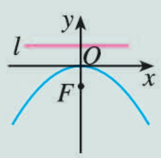
将上式两边平方并化简，得

$$y^2=2px\ (p>0). \qquad ①$$

从上述过程可以看到，抛物线上任意一点的坐标 (x, y) 都是方程①的解，以方程①的解为坐标的点 (x, y) 与抛物线的焦点 $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ 的距离和它到准线 $x=-\frac{p}{2}$ 的距离相等，即以方程①的解为坐标的点都在抛物线上．我们把方程①叫做**抛物线的标准方程**．它表示焦点在 x 轴正半轴上，焦点是 $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$，准线是 $x=-\frac{p}{2}$ 的抛物线.

探究

在建立椭圆、双曲线的标准方程时，选择不同的坐标系我们得到了不同形式的标准方程．抛物线的标准方程有哪些不同的形式？请探究之后填写下表.

图形	标准方程	焦点坐标	准线方程
	$y^2=2px\ (p>0)$	$\left(\frac{p}{2}, 0\right)$	$x=-\frac{p}{2}$
			
			
			

思考

你能说明二次函数 $y=ax^2(a\neq 0)$ 的图象为什么是抛物线吗？指出它的焦点坐标、准线方程.

例 1 （1）已知抛物线的标准方程是 $y^2=6x$，求它的焦点坐标和准线方程；

（2）已知抛物线的焦点是 $F(0,\ -2)$，求它的标准方程.

解：（1）因为 $p=3$，抛物线的焦点在 x 轴正半轴上，所以它的焦点坐标是 $\left(\frac{3}{2},\ 0\right)$，准线方程是 $x=-\frac{3}{2}$.

（2）因为抛物线的焦点在 y 轴负半轴上，且 $\frac{p}{2}=2$，$p=4$，所以抛物线的标准方程是 $x^2=-8y$.

例 2 一种卫星接收天线如图 3.3-3 左图所示，其曲面与轴截面的交线为抛物线. 在轴截面内的卫星波束呈近似平行状态射入形为抛物线的接收天线，经反射聚集到焦点处，如图 3.3-3（1）. 已知接收天线的口径（直径）为 4.8 m，深度为 1 m. 试建立适当的坐标系，求抛物线的标准方程和焦点坐标.

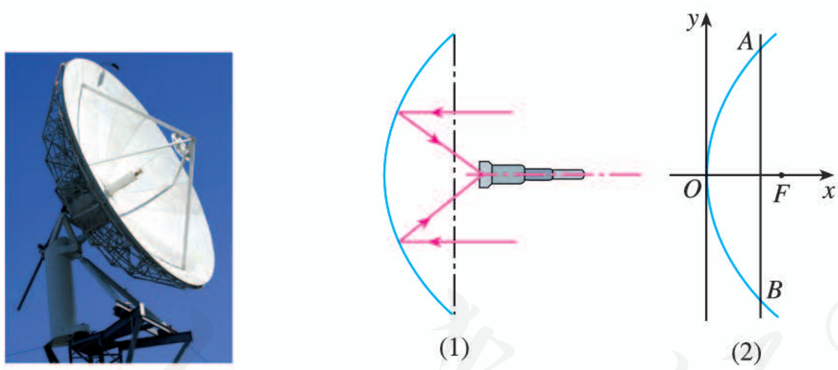


图 3.3-3

解：如图 3.3-3（2），在接收天线的轴截面所在平面内建立直角坐标系，使接收天线的顶点（即抛物线的顶点）与原点重合，焦点在 x 轴上.

设抛物线的标准方程是 $y^2=2px$（$p>0$）. 由已知条件得，点 A 的坐标是 $(1,\ 2.4)$，代入方程，得

$$2.4^2=2p\times 1,$$

即 $p=2.88$.

所以，所求抛物线的标准方程是 $y^2=5.76x$，焦点坐标是 $(1.44,\ 0)$.

练习

1. 根据下列条件写出抛物线的标准方程：

(1) 焦点是 $F(3,0)$；　(2) 准线方程是 $x=-\frac{1}{4}$；　(3) 焦点到准线的距离是 2.

2. 求下列抛物线的焦点坐标和准线方程：

(1) $y^2=20x$；　(2) $x^2=\frac{1}{2}y$；　(3) $2y^2+5x=0$；　(4) $x^2+8y=0$.

3. 填空.

(1) 抛物线 $y^2=2px$ ($p>0$) 上一点 M 与焦点间的距离是 $a\left(a>\frac{p}{2}\right)$，则点 M 到准线的距离是________，点 M 的横坐标是____________；

(2) 抛物线 $y^2=12x$ 上与焦点的距离等于 9 的点的坐标是____________.

探究与发现

为什么二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象是抛物线

我们知道，二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象是抛物线. 经过本节的学习我们知道，抛物线是平面内与一个定点 F 和一条定直线 l（l 不经过点 F）的距离相等的点的轨迹. 因此，只要能说明二次函数的图象符合抛物线的几何特征，就解决了为什么二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象是抛物线的问题. 由抛物线与其方程之间的关系可知，如果能用适当的方式将 $y=ax^2+bx+c$ 转化为抛物线标准方程的形式，那么就可以说明二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象是抛物线.

按照这种思路，我们对 $y=ax^2+bx+c$ 的右边配方，得

$$y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}.$$

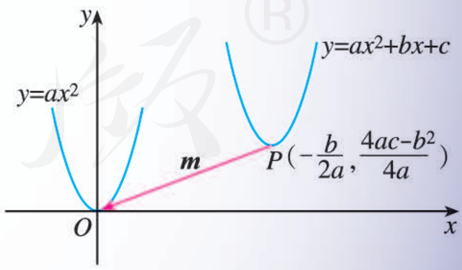


图 1

由函数图象平移的性质可以知道，沿向量 $\boldsymbol{m}=\left(\frac{b}{2a},-\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$ 平移函数 $y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$ 的图象（图 1），除了位置外，函数图象不发生任何变化. 平移后的图象对应的函数解析式为 $y=ax^2$，即 $x^2=\frac{1}{a}y$，这个方程表示的曲线是顶点为原点，焦点为 $\left(0,\frac{1}{4a}\right)$ 的抛物线.

因此，二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象是一条抛物线.

3.3.2 抛物线的简单几何性质

思考

类比用方程研究椭圆、双曲线几何性质的过程与方法，你认为应研究抛物线

$$y^2=2px\ (p>0) \qquad ①$$

的哪些几何性质？如何研究这些性质？

1. 范围

因为 $p>0$，由方程①可知，对于抛物线上的点 $M(x, y)$，$x\geqslant 0$，$y\in\mathbf{R}$，当 $x>0$ 时，抛物线在 y 轴的右侧，开口方向与 x 轴的正方向相同；当 x 的值增大时，$|y|$的值也增大，这说明抛物线向右上方和右下方无限延伸.

2. 对称性

以 $-y$ 代 y，方程①不变，所以抛物线关于 x 轴对称. 我们把抛物线的对称轴叫做**抛物线的轴**.

3. 顶点

抛物线和它的轴的交点叫做**抛物线的顶点**. 在方程①中，当 $x=0$ 时，$y=0$，因此抛物线的顶点就是原点.

4. 离心率

抛物线上的点 M 与焦点 F 的距离和点 M 到准线的距离 d 的比 $\dfrac{|MF|}{d}$，叫做**抛物线的离心率**，用 e 表示. 由抛物线的定义可知，$e=1$.

例 3 已知抛物线关于 x 轴对称，它的顶点在原点，并且经过点 $M(2, -2\sqrt{2})$，求它的标准方程.

解： 因为抛物线关于 x 轴对称，它的顶点在原点，并且经过点 $M(2, -2\sqrt{2})$，所以可设它的标准方程为

$$y^2=2px\ (p>0).$$

因为点 M 在抛物线上，所以

$$(-2\sqrt{2})^2=2p\times 2,$$

解得 $p=2$.

因此，所求抛物线的标准方程是

$$y^2=4x.$$

思考

顶点在原点，对称轴是坐标轴，并且经过点 $M(2, -2\sqrt{2})$ 的抛物线有几条？求出这些抛物线的标准方程.

例 4 斜率为 1 的直线 l 经过抛物线 $y^2=4x$ 的焦点 F，且与抛物线相交于 A，B 两点，求线段 AB 的长.

分析： 由抛物线的方程可以得到它的焦点坐标，又直线 l 的斜率为 1，所以可以求出直线 l 的方程；与抛物线的方程联立，可以求出 A，B 两点的坐标；利用两点间的距离公式可以求出 $|AB|$. 这种方法思路直接，具有一般性. 请你用此方法求 $|AB|$.

下面介绍另外一种方法——数形结合的方法.

在图 3.3-4 中，设 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$. 由抛物线的定义可知，$|AF|$ 等于点 A 到准线的距离 $|AA'|$. 由 $p=2$，$\frac{p}{2}=1$，得 $|AA'|=x_1+\frac{p}{2}=x_1+1$，于是 $|AF|=x_1+1$. 同理，$|BF|=|BB'|=x_2+\frac{p}{2}=x_2+1$，于是得

$$|AB|=|AF|+|BF|=x_1+x_2+p=x_1+x_2+2.$$

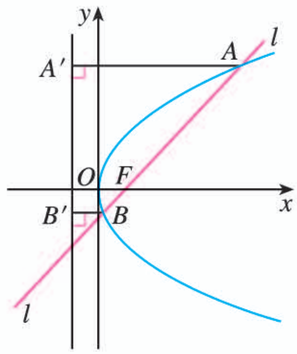


图 3.3-4

由此可见，只要求出点 A，B 的横坐标之和 x_1+x_2，就可以求出 $|AB|$.

解： 由题意可知，$p=2$，$\frac{p}{2}=1$，焦点 F 的坐标为 $(1, 0)$，准线方程为 $x=-1$. 如图 3.3-4，设 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，A，B 两点到准线的距离分别为 d_A，d_B. 由抛物线的定义，可知

$$|AF|=d_A=x_1+1,\ |BF|=d_B=x_2+1,$$

于是

$$|AB|=|AF|+|BF|=x_1+x_2+2.$$

因为直线 l 的斜率为 1，且过焦点 $F(1, 0)$，所以直线 l 的方程为

$$y=x-1. \quad ①$$

> 如果直线 l 不经过焦点 F，$|AB|$ 还等于 x_1+x_2+2 吗？

将①代入方程 $y^2=4x$，得 $(x-1)^2=4x$，化简，得

$$x^2-6x+1=0.$$

所以

$$x_1+x_2=6,$$

$$|AB|=x_1+x_2+2=8.$$

所以，线段 AB 的长是 8.

练习

1. 求适合下列条件的抛物线的标准方程：

   (1) 关于 x 轴对称，并且经过点 $M(5,\ -4)$；

   (2) 关于 y 轴对称，准线经过点 $E(5,\ -5)$；

   (3) 准线在 y 轴的右侧，顶点到准线的距离是 4；

   (4) 焦点 F 在 y 轴负半轴上，经过横坐标为 16 的点 P，且 FP 平行于准线.

2. 在同一坐标系中画出下列抛物线，观察它们开口的大小，并说明抛物线开口大小与方程中 x 的系数的关系：

   (1) $y^2=\frac{1}{2}x$；　(2) $y^2=x$；　(3) $y^2=2x$；　(4) $y^2=4x$.

3. 过点 $M(2,\ 0)$ 作斜率为 1 的直线 l，交抛物线 $y^2=4x$ 于 A，B 两点，求 $|AB|$.

4. 垂直于 x 轴的直线交抛物线 $y^2=4x$ 于 A，B 两点，且 $|AB|=4\sqrt{3}$，求直线 AB 的方程.

例 5　经过抛物线焦点 F 的直线交抛物线于 A，B 两点，经过点 A 和抛物线顶点的直线交抛物线的准线于点 D，求证：直线 DB 平行于抛物线的对称轴.

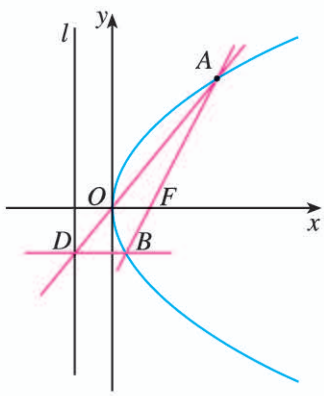


图 3.3-5

分析： 我们用坐标法证明这个结论，即通过建立抛物线及直线的方程，运用方程研究直线 DB 与抛物线对称轴之间的位置关系. 建立如图 3.3-5 所示的直角坐标系，只要证明点 D 的纵坐标与点 B 的纵坐标相等即可.

证明： 如图 3.3-5，以抛物线的对称轴为 x 轴，抛物线的顶点为原点，建立平面直角坐标系 Oxy. 设抛物线的方程为

$$y^2=2px\ (p>0), \tag{①}$$

点 A 的坐标为 $\left(\frac{y_0^2}{2p},\ y_0\right)$ $(y_0\neq 0)$，则直线 OA 的方程为

$$y=\frac{2p}{y_0}x, \tag{②}$$

抛物线的准线方程是 $x=-\frac{p}{2}$.　③

联立②③，可得点 D 的纵坐标为 $-\frac{p^2}{y_0}$.

因为焦点 F 的坐标是 $\left(\frac{p}{2},\ 0\right)$，当 $y_0^2\neq p^2$ 时，直线 AF 的方程为

$$y=\frac{2py_0}{y_0^2-p^2}\left(x-\frac{p}{2}\right). \tag{④}$$

联立①④，消去 x，可得 $y_0y^2-(y_0^2-p^2)y-y_0p^2=0$，即

$$(y-y_0)(y_0y+p^2)=0,$$

可得点 B 的纵坐标为 $-\dfrac{p^2}{y_0}$，与点 D 的纵坐标相等，于是 DB 平行于 x 轴.

当 $y_0^2=p^2$ 时，易知结论成立.

所以，直线 DB 平行于抛物线的对称轴.

> 你还有其他证明方法吗？

例 6 如图 3.3-6，已知定点 $B(a,\ -h)$，$BC\perp x$ 轴于点 C，M 是线段 OB 上任意一点，$MD\perp x$ 轴于点 D，$ME\perp BC$ 于点 E，OE 与 MD 相交于点 P，求点 P 的轨迹方程.

解： 设点 $P(x,\ y)$，$M(x,\ m)$，其中 $0\leqslant x\leqslant a$，则点 E 的坐标为 $(a,\ m)$.

由题意，直线 OB 的方程为

$$y=-\frac{h}{a}x. \qquad ①$$

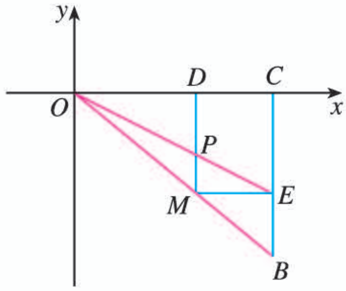


图 3.3-6

因为点 M 在 OB 上，将点 M 的坐标代入①，得

$$m=-\frac{h}{a}x, \qquad ②$$

所以点 P 的横坐标 x 满足②.

直线 OE 的方程为

$$y=\frac{m}{a}x, \qquad ③$$

因为点 P 在 OE 上，所以点 P 的坐标 $(x,\ y)$ 满足③.

将②代入③，消去 m，得

$$x^2=-\frac{a^2}{h}y\ \ (0\leqslant x\leqslant a),$$

即点 P 的轨迹方程.

例 6 中，设点 B 关于 y 轴的对称点为 A，则方程

$$x^2=-\frac{a^2}{h}y\ \ (-a\leqslant x\leqslant a)$$

对应的轨迹是常见的抛物拱 AOB（图 3.3-7）. 抛物拱在现实中有许多原型，如桥拱（图 3.3-8）、卫星接收天线等，抛掷出的铅球在空中划过的轨迹也是抛物拱的一部分.

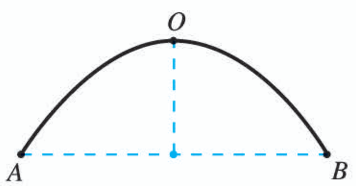


图 3.3-7


图 3.3-8

练习

1. 求适合下列条件的抛物线的标准方程：

   (1) 焦点 F 关于准线的对称点为 $M(0, -9)$；

   (2) 关于 y 轴对称，与直线 $y=-12$ 相交所得线段的长为 12；

   (3) 关于 x 轴对称，以焦点和准线上的两点为顶点的三角形是边长为 $2\sqrt{3}$ 的等边三角形.

2. 点 $M(m, 4)$ 在抛物线 $y^2=24x$ 上，F 为焦点，直线 MF 与准线相交于点 N，求 $|FN|$.

3. 设抛物线 $x^2=2py$ ($p>0$) 上的点 M 与焦点 F 的距离为 4，点 M 到 y 轴的距离为 $\sqrt{3p}$，求抛物线的方程和点 M 的坐标.

4. 两条直线 $y=kx$ 和 $y=-kx$ 分别与抛物线 $y^2=2px$ ($p>0$) 相交于不同于原点的 A，B 两点，k 为何值时，直线 AB 经过抛物线的焦点?

5. 已知圆心在 y 轴上移动的圆经过点 $A(0, 5)$，且与 x 轴、y 轴分别交于 $B(x, 0)$，$C(0, y)$ 两个动点，求点 $M(x, y)$ 的轨迹方程.

习题 3.3

复习巩固

1. 求下列抛物线的焦点坐标和准线方程：

   (1) $x^2=2y$；　(2) $4x^2+3y=0$；　(3) $2y^2+x=0$；　(4) $y^2-6x=0$.

2. 填空题.

   (1) 准线方程为 $x=2$ 的抛物线的标准方程是__________；

   (2) 抛物线 $y^2=8x$ 上与焦点的距离等于 6 的点的坐标是__________.

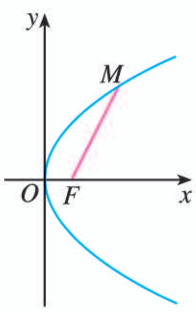
3. 抛物线 $y^2=2px$ ($p>0$) 上一点 M 与焦点 F 的距离 $|MF|=2p$，求点 M 的坐标.

4. 根据下列条件，求抛物线的标准方程，并画出图形：

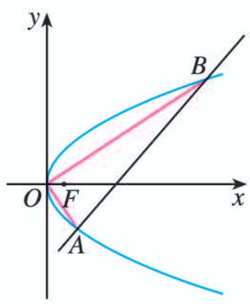
   (1) 顶点在原点，对称轴是 x 轴，并且顶点与焦点的距离等于 6；

   (2) 顶点在原点，对称轴是 y 轴，并经过点 $P(-6, -3)$.

5. 如图，M 是抛物线 $y^2=4x$ 上的一点，F 是抛物线的焦点，以 Fx 为始边、FM 为终边的角 $\angle xFM=60°$，求 $|FM|$.



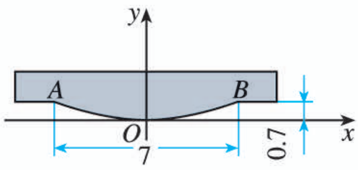
(第 5 题)



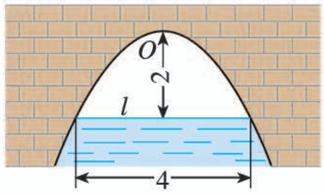
(第 6 题)

6. 如图，直线 $y=x-2$ 与抛物线 $y^2=2x$ 相交于 A，B 两点，求证：$OA\perp OB$.

7. 如图，吊车梁的鱼腹部分 AOB 是抛物线的一段，宽为 7 m，高为 0.7 m. 根据图中的坐标系，求这条抛物线的方程.



（第 7 题）



（第 8 题）

8. 图中是抛物线形拱桥，当水面在 l 时，拱顶离水面 2 m，水面宽 4 m. 水面下降 1 m 后，水面宽多少？（精确到 0.1 m）

综合运用

9. 从抛物线 $y^2=2px$（$p>0$）上各点向 x 轴作垂线段，求垂线段的中点的轨迹方程，并说明它是什么曲线.

10. 已知等边三角形的一个顶点位于原点，另外两个顶点在抛物线 $y^2=2px$（$p>0$）上，求这个等边三角形的边长.

11. 已知 A，B 两点的坐标分别是 $(-1,0)$，$(1,0)$，直线 AM，BM 相交于点 M，且直线 AM 的斜率与直线 BM 的斜率的差是 2，求点 M 的轨迹方程.

拓广探索

12. 已知抛物线的方程为 $y^2=4x$，直线 l 绕其上一点 $P(-2,1)$ 旋转，讨论直线 l 与抛物线 $y^2=4x$ 的公共点个数，并回答下列问题：

(1) 画出图形表示直线 l 与抛物线的各种位置关系，从图中你发现直线 l 与抛物线只有一个公共点时是什么情况？

(2) $y^2=4x$ 与直线 l 的方程组成的方程组解的个数与公共点的个数是什么关系？

13. 设抛物线 $y^2=2px$（$p>0$）的焦点为 F，从点 F 发出的光线经过抛物线上的点 M（不同于抛物线的顶点）反射，证明反射光线平行于抛物线的对称轴.

阅读与思考

圆锥曲线的光学性质及其应用

椭圆、双曲线、抛物线这些圆锥曲线都有焦点．焦点，顾名思义，就是光线的聚集点．这说明圆锥曲线与光线有紧密的联系，圆锥曲线具有丰富的光学性质．

我们知道，当一束光线照到镜面时，光线会依一定的规律反射，即反射角等于入射角（图 1）．当光照射到曲面时，特别是由圆锥曲线绕其对称轴旋转而成的曲面时，会有什么现象呢？

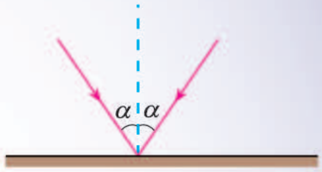


图 1

我们看生活中的一个实例：一只很小的灯泡发出的光，会分散地射向各方，但把它装在圆柱形手电筒里，经过适当调节，就能射出一束比较强的平行光线，这是为什么呢？

原来手电筒内，在小灯泡后面有一个反光镜，镜面的形状是一个由抛物线绕它的对称轴旋转所得到的曲面（图 2），这种曲面叫做抛物面．抛物线有一条重要性质：从焦点发出的光线，经过抛物线上的一点反射后，反射光线平行于抛物线的轴．探照灯（图 3）也是利用这个原理设计的．

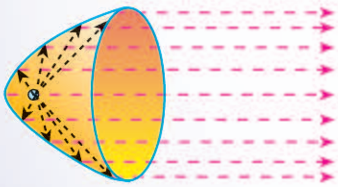


图 2

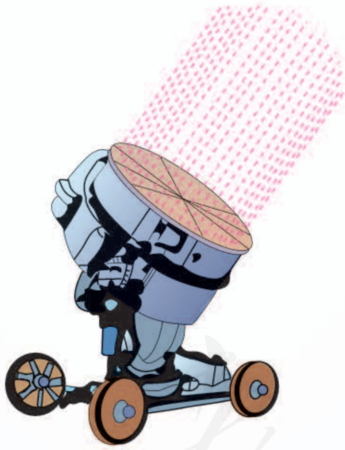


图 3

图 4

应用抛物线的这个性质，也可以使一束平行于抛物线的轴的光线，经过抛物面的反射集中于它的焦点．人们应用这个原理，设计了一种加热水和食物的太阳灶（图 4）．在这种太阳灶上装有一个旋转抛物面形的反光镜，当它的轴与太阳光线平行时，太阳光线经过反射后集中于焦点处，这一点的温度就会很高．

椭圆和双曲线的光学性质与抛物线不同．从椭圆的一个焦点发出的光线，经过椭圆反射后，反射光线交于椭圆的另一个焦点上（图 5）；从双曲线的一个焦点发出的光线，经过双曲线反射后，反射光线是散开的，它们就好像是从另一个焦

点射出的一样（图 6）. 椭圆、双曲线的光学性质也被人们广泛地应用于各种设计中.

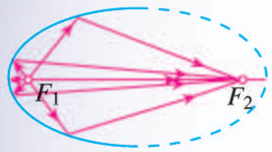


图 5

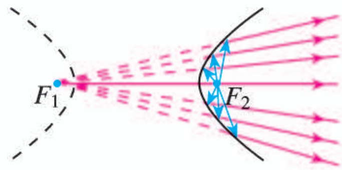


图 6

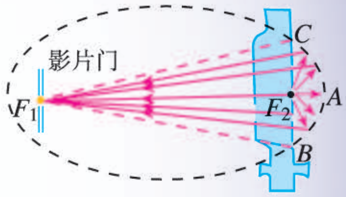


图 7

如图 7，胶片电影放映机的聚光灯有一个反射镜，它的形状是旋转椭圆面. 为了使影片门（电影胶片通过的地方）处获得最强的光线，灯丝 F_2 与影片门 F_1 应位于椭圆的两个焦点处，这就是利用椭圆光学性质的一个实例. 数字电影机采用数字光处理技术 DLP 的数字电影放映新模式，替代了传统胶片电影放映机胶片图像重现模式，实现了无胶片放映.

文献阅读与数学写作*

解析几何的形成与发展

对数的发明、解析几何的创始和微积分的建立被马克思主义创始人之一的恩格斯并称为 17 世纪数学的三大成就. 解析几何的产生是科学发展的需要. 坐标系的引入，使常量数学进入变量数学时代，而变量进入数学正是近代数学的重要标志. 由于变量进入了数学，我们可以研究运动与变化，研究物体运动的轨迹. 解析几何可以定量描述物体的运动变化，为研究物体的运动变化提供了方法和工具，特别是为微积分的建立提供了重要支撑.

解析几何是如何形成和发展的？在数学和人类社会的发展历史中起了什么作用？请你按以下要求，查阅与解析几何有关的文献，自己选题，写一篇数学小论文.

一、主题

1. 解析几何形成与发展的过程；
2. 解析几何对人类文明的主要贡献.

二、实施建议

1. 选题：根据个人兴趣，围绕主题，初步确定选题范围；
2. 分组：相近选题的 5～6 人为一个小组，确定一名组长；
3. 分配任务：根据个人的具体情况，经小组共同商议，由组长确定每人的具体任务；
4. 搜集资料：针对具体的论文题目，通过网络、书店、图书馆等多种途径搜集素材，包括文字、图片、数据以及音像资料，并记录相关资料；
5. 素材汇总：用论文的形式展现小组的实践成果；
6. 在全班范围进行交流、讨论和总结.

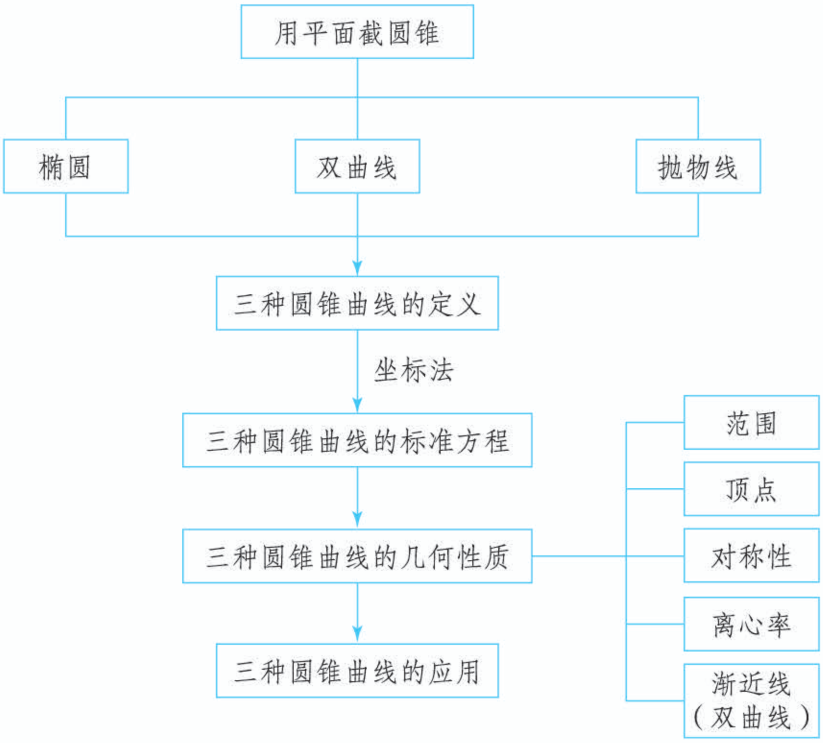
三、参考选题

1. 解析几何产生的背景；
2. 解析几何发展中的重要事件；
3. 对解析几何的形成与发展作出重要贡献的数学家；
4. 解析几何对人类文明进步的贡献.

* 标有 * 的内容为选学内容，不作为考试要求.

小结

一、本章知识结构



二、回顾与思考

圆锥曲线有丰富的现实背景和广泛的实际应用，例如行星运行轨道、抛物运动轨迹、探照灯的镜面等．本章我们结合具体情境探索了椭圆、双曲线和抛物线的几何特征，利用确定三类圆锥曲线的几何要素（如定点、定直线等）合理地建立坐标系，用代数语言描述这些特征，得到相应的标准方程，通过方程研究了圆锥曲线的简单几何性质，并用圆锥曲线的方程解决了一些简单问题．

我们用 C 代表曲线，用 $f(x, y)=0$ 表示方程．通过本章的学习可以看到，只有当曲线 C 上任意一点的坐标都满足方程 $f(x, y)=0$，同时以方程 $f(x, y)=0$ 的解为坐标的点都在曲线 C 上，我们才称“曲线 C 是方程 $f(x, y)=0$ 的曲线”“方程 $f(x, y)=0$ 是曲线 C 的方程”．也只有在这样的条件下，才能通过研究方程 $f(x, y)=0$ 的性质得到曲线 C 的性质．利用坐标系建立曲线与方程的这种关系，是解析几何的基础，在今后的学习中可以进一步体会到．

通过本章的学习可以看到，用坐标法研究几何问题，首先要注意观察相应几何图形的特征，把握确定几何图形的要素，例如椭圆是平面内到两个定点的

距离之和等于定长的点的轨迹，这里“两个定点”“距离之和为定长”等就是确定椭圆的几何要素；然后再用坐标法解决，即利用几何特征合理建立坐标系，用坐标表示点，用方程表示几何要素的关系．在此基础上，利用方程研究曲线的性质．可以看到，解析几何中研究椭圆、双曲线、抛物线的过程和方法是一致的．这表明，用代数方法研究几何问题（如圆锥曲线的性质），其处理方法具有统一性．实际上，通过代数方法研究几何图形，不但有利于发现和证明图形的性质，而且这种解决问题的方式基本上是程序化的，这是解析几何的优势所在，是体现数形结合思想方法威力的典范，需要我们在学习中认真体会．

我们发现，用坐标法研究几何图形时，代数式的化简、方程的变形与等价转化等起着很重要的作用．例如，当我们把椭圆的方程化简为标准方程后，就能容易地看出椭圆的范围、对称性、顶点等，发现长轴、短轴、焦距之间的关系，并由此得到刻画椭圆扁平程度的离心率等．所以，学习解析几何需要较强的逻辑推理、数学运算等能力，同学们要给予特别关注．

在圆锥曲线的研究中，信息技术可以发挥很好的作用．例如，运用信息技术，可以方便地画出曲线；通过改变某些量（如椭圆的长轴的长、短轴的长或焦距等），可以帮助我们发现曲线的几何特征及其基本性质（变化中的不变性）等．研究圆锥曲线时，信息技术在发现问题、形成思想方法、获得结论等方面，都能发挥重要作用．

请你带着下面的问题，复习一下全章内容吧！

1. 你能说说用坐标法研究圆锥曲线的具体过程吗？

2. 在椭圆、双曲线、抛物线三类圆锥曲线的研究中，椭圆是研究的第一类圆锥曲线，对双曲线、抛物线的研究，我们采用的是类比的方法，你能说说具体的类比内容吗？

3. 椭圆、双曲线、抛物线的几何特征是什么？这些几何特征在研究圆锥曲线中有什么作用？

4. 圆锥曲线的几何性质主要包括哪些方面？如何用代数方法研究这些几何性质？

5. 圆锥曲线的“统一性”体现在哪些方面？你如何理解圆锥曲线的“统一性”？

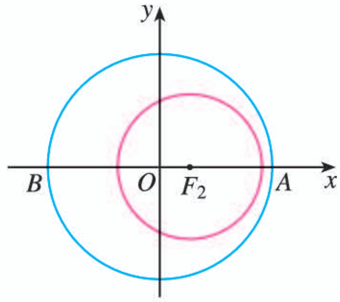
6. 如何用直线与圆锥曲线的方程判断它们之间的位置关系？

7. 数形结合在圆锥曲线的研究中具有重要作用，你能举例说明吗？

复习参考题 3

复习巩固

1. 如图，我国发射的第一颗人造地球卫星的运行轨道，是以地心（地球的中心）F_2 为一个焦点的椭圆．已知它的近地点（离地面最近的点）A 距地面 439 km，远地点（离地面最远的点）B 距地面 2 384 km，并且 F_2，A，B 在同一直线上，地球半径约为 6 371 km．求：(1) 卫星运行的轨道方程（精确到 1 km）；(2) 卫星轨道的离心率．



（第 1 题）

2. 选择题．

(1) 椭圆$\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$与椭圆$\dfrac{x^2}{25-k}+\dfrac{y^2}{9-k}=1$（$k<9$）的（　　）．

(A) 长轴长相等　　(B) 短轴长相等

(C) 离心率相等　　(D) 焦距相等

(2) 与圆 $x^2+y^2=1$ 及圆 $x^2+y^2-8x+12=0$ 都外切的圆的圆心在（　　）．

(A) 椭圆上　　(B) 双曲线的一支上

(C) 抛物线上　　(D) 圆上

3. 当 α 从 $0°$ 到 $180°$ 变化时，方程 $x^2+y^2\cos\alpha=1$ 表示的曲线的形状怎样变化？

4. 已知直线 $y=kx-1$ 与双曲线 $x^2-y^2=4$ 没有公共点，求 k 的取值范围．

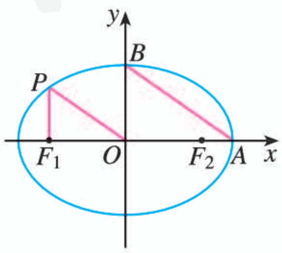
5. 设抛物线的顶点为 O，经过焦点且垂直于对称轴的直线交抛物线于 B，C 两点，经过抛物线上一点 P 且垂直于轴的直线与轴交于点 Q．求证：$|PQ|^2=|BC||OQ|$．

6. 已知等边三角形的一个顶点位于抛物线 $y^2=2px$（$p>0$）的焦点，另外两个顶点在抛物线上，求这个等边三角形的边长．

综合运用

7. 已知 P 是椭圆 $16x^2+25y^2=1\ 600$ 上的一点，且在 x 轴上方，F_1，F_2 分别是椭圆的左、右焦点，直线 PF_2 的斜率为 $-4\sqrt{3}$，求 $\triangle PF_1F_2$ 的面积．

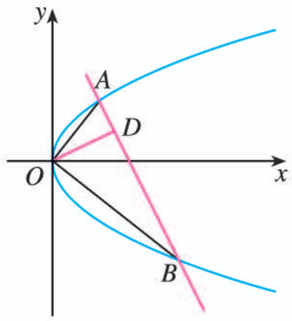
8. 如图，从椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）上一点 P 向 x 轴作垂线，垂足恰为左焦点 F_1．又点 A 是椭圆与 x 轴正半轴的交点，点 B 是椭圆与 y 轴正半轴的交点，且 $AB/\!/OP$，$|F_1A|=\sqrt{10}+\sqrt{5}$，求椭圆的方程．



（第 8 题）

9. 已知 A，B 两点的坐标分别是 $(-1,0)$，$(1,0)$．直线 AM，BM 相交于点 M，且它们的斜率之和是 2，求点 M 的轨迹方程．

10. 如图，已知直线与抛物线 $y^2=2px$ ($p>0$) 交于 A，B 两点，且 $OA\perp OB$，$OD\perp AB$ 交 AB 于点 D，点 D 的坐标为 $(2, 1)$，求 p 的值.



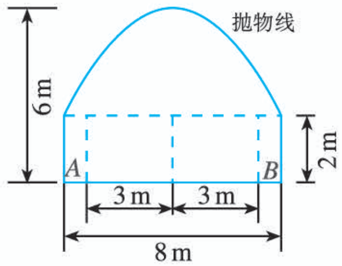
(第 10 题)

11. 已知△ABC 的两个顶点 A，B 的坐标分别是 $(-5, 0)$，$(5, 0)$，且 AC，BC 所在直线的斜率之积等于 m ($m\neq 0$)，求顶点 C 的轨迹.

12. 在抛物线 $y^2=4x$ 上求一点 P，使得点 P 到直线 $y=x+3$ 的距离最短.

13. 当 m 变化时，指出方程 $(m-1)x^2+(3-m)y^2=(m-1)(3-m)$ 表示的曲线的形状.

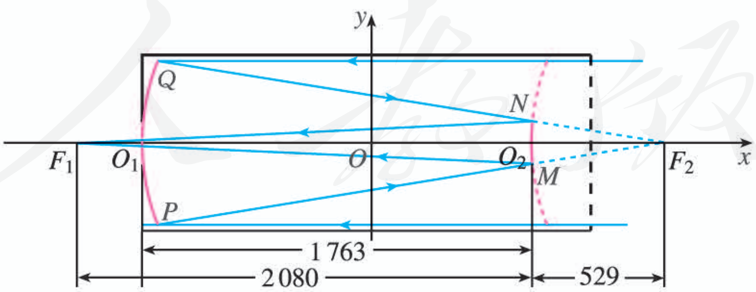
14. 如图，一隧道内设双行线公路，其截面由一个长方形和抛物线构成. 为保证安全，要求行驶车辆顶部（设为平顶）与隧道顶部在竖直方向上高度之差至少要有 0.5 m. 已知行车道总宽度 $|AB|=6$ (m)，那么车辆通过隧道的限制高度是多少米？（精确到 0.1 m）



(第 14 题)

拓广探索

15. 综合应用抛物线和双曲线的光学性质，可以设计制造反射式天文望远镜. 这种望远镜的特点是，镜筒可以很短而观察天体运动又很清楚. 例如，某天文仪器厂设计制造的一种镜筒长为 2 m 的反射式望远镜，其光学系统的原理如图（中心截口示意图）所示. 其中，一个反射镜 PO_1Q 弧所在的曲线为抛物线，另一个反射镜 MO_2N 弧所在的曲线为双曲线的一个分支. 已知 F_1，F_2 是双曲线的两个焦点，其中 F_2 同时又是抛物线的焦点，试根据图示尺寸（单位：mm)，分别求抛物线和双曲线的方程.



(第 15 题)

16. 过抛物线 $y^2=2px$ ($p>0$) 的焦点 F 作直线与抛物线交于 A，B 两点，以 AB 为直径画圆，观察它与抛物线的准线 l 的关系，你能得到什么结论？相应于椭圆、双曲线如何？你能证明你的结论吗？

部分中英文词汇索引

后　记

本册教科书是人民教育出版社课程教材研究所中学数学课程教材研究开发中心依据教育部《普通高中数学课程标准（2017年版）》编写的，经国家教材委员会2019年审查通过.

本册教科书的编写，集中反映了我国十余年来普通高中课程改革的成果，吸取了2004年版《普通高中课程标准实验教科书·数学（A版）》的编写经验，凝聚了参与课改实验的教育专家、学科专家、教材编写专家、教研人员和一线教师，以及教材设计装帧专家的集体智慧. 本册教科书的编写者还有李海东、张劲松等；本书插图绘制为王俊宏，为本书提供照片的有东方IC图片网（第104页一张图）等.

我们感谢2004年版《普通高中课程标准实验教科书·数学（A版）》的主编刘绍学，副主编钱珮玲、章建跃，以及所有编写人员. 我们感谢所有对教科书的编写、出版、试教等提供过帮助与支持的同仁和社会各界朋友.

本册教科书出版之前，我们通过多种渠道与教科书选用作品（包括照片、画作）的作者进行了联系，得到了他们的大力支持. 对此，我们表示衷心的感谢！恳请未联系到的作者与我们联系，以便及时支付稿酬.

我们真诚地希望广大教师、学生及家长在使用本册教科书的过程中提出宝贵意见. 我们将集思广益，不断修订，使教科书趋于完善.

联系方式

电话：010–58758866

电子邮箱：jcfk@pep.com.cn

人民教育出版社　课程教材研究所

中学数学课程教材研究开发中心

2019 年 4 月

PUTONG GAOZHONG JIAOKESHU

SHUXUE

人教版®

绿色印刷产品

ISBN 978-7-107-34596-8
9 787107 345968
定价：00.00 元